УДК 539.33
doi:10.24412/0136-4545-2026-1-32-44
EDN:GVHNVZ

©2026. **С.А. Калоеров, М.А. Полянский**

ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ С ОТВЕРСТИЯМИ, ТРЕЩИНАМИ И ВЫЕМАМИ

Приведено решение задачи об электромагнитоупругом состоянии полосы с произвольными эллиптическими отверстиями, в том числе переходящими в трещины, с пересекающимися контурами и пересекающими прямолинейные границы. Решение построено с использованием комплексных потенциалов, разложений функций в ряды Лорана и удовлетворения граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов, приводящего задачу к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. Даны описания результатов численных исследований для полосы с круговым отверстием, с круговым отверстием и краевой трещиной из его контура. Рассмотрены случаи полосы с круговым выемом на одной прямолинейной границе, с круговым отверстием и разрезом между ними и прямолинейной границей. Изучены закономерности изменения основных характеристик электромагнитоупругого состояния полосы в зависимости от геометрических характеристик и физико-механических свойств ее материала.

Ключевые слова: *электромагнитоупругая пластинка, полоса, отверстия, трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.*

Введение. Современные пьезоматериалы широко используются при изготовлении элементов различных конструкций [1–4]. Зачастую эти элементы имеют отверстия и трещины, около которых при эксплуатации конструкций возникают высокие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании конструкций. Следовательно, нужно иметь достаточно надежные методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) пластин с отверстиями и трещинами. А такие методы получаются при решении соответствующих задач методами комплексных потенциалов электромагнитоупругости [5] с использованием для определения этих функций обобщенного метода наимень-

Калоеров Стефан Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1339-6035.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Полянский Максим Алексеевич – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: m4xpolyan@yandex.ru, ORCID: 0009-0007-2281-3220.

Polianskii Maxim Alekseevich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

ших квадратов (ОМНК) [6–8], обеспечивающего достаточно высокую точность удовлетворения граничным условиям.

В данной статье решена задача электромагнитоупругости для полосы с произвольными отверстиями и трещинами. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием или с круговым отверстием и краевой трещиной из контура отверстия. Изучены закономерности изменения ЭМУС полосы в зависимости от ее пьезосвойств и геометрических характеристик полосы, отверстий и трещин.

1. Постановка и решение задачи. Рассмотрим узкую полосу из пьезоматериала, занимающую область S с прямолинейными границами L^+, L^- и контурами эллиптических отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\overrightarrow{\leftarrow}\mathcal{L}}\right)$ с полуосями a_l, b_l (рис. 1). Выберем основную прямоугольную систему координат Oxy с началом в произвольной точке полосы на расстояниях h^+, h^- от границ L^+, L^- соответственно и осью Ox, параллельной прямолинейным границам. Отнесем эллипсы L_l к локальным системам координат $O_lx_ly_l$ с началами в их центрах и направлениями осей Ox_l вдоль полуосей эллипсов a_l.

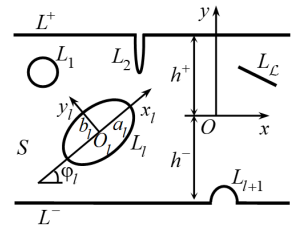

Рис. 1.

Тогда в локальных и в основной системах координат параметрические уравнения L_l имеют вид

$$x_l = a_l\cos\theta,\ \ y_l = b_l\sin\theta; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l\cos\varphi_l - y_l\sin\varphi_l,\\ y &= y_{0l} + x_l\sin\varphi_l + y_l\cos\varphi_l, \end{aligned} \tag{2}$$

где θ - параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_lx_ly_l$ в основной системе Oxy; φ_l - угол между направлениями осей Ox и O_lx_l, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки. Будем считать, что прямолинейные границы не загружены, каждый из контуров отверстий не загружен или жестко подкреплен; на бесконечности полоса растягивается усилиями $\sigma_x^\infty = p$, в связи с чем $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = 0$.

Решение задачи об определении ЭМУС рассматриваемой пьезополосы будем проводить методом комплексных потенциалов. Тогда оно сводится к определению функций $\Phi_k(z_k)$ $(k=1,4)$ обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \tag{3}$$

где μ_k – корни известного характеристического уравнения, из граничных условий на контурах

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ik}\Phi_k(t_k) = f_{il}(t) \quad \left(i=\overline{1,4}\right), \tag{4}$$

в которых

$$g_{ik} = (1,\ \mu_k,\ -\nu_k,\ -\rho_k)\,,$$
$$(f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ f_4(t)) = \mp\int\limits_0^s (Y_n,\ X_n,\ D_n,\ B_n)\,ds + (c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4), \tag{5}$$

если на соответствующем контуре заданы внешние усилия X_n, Y_n и индукции D_n, B_n,

$$g_{ik} = (p_{k0},\ q_{k0},\ -\nu_k,\ -\rho_k)\,,$$
$$(f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ f_4(t)) = \left(u^*,\ v^*,\ \mp\int\limits_0^s (D_n,\ B_n)\,ds\right) + (c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)\,, \tag{6}$$

когда на контуре заданы перемещения u^*, v^* и индукции D_n, B_n;

$$p_k = \mu_k^2 s_{11} - s_{16}\mu_k + (g_{11}\mu_k - g_{21})\,\nu_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\,\rho_k,$$
$$q_k = \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\right)\nu_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k}\right)\rho_k; \tag{7}$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала пластинки; g_{ki} и p_{ki} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженностей электрического и магнитного полей; ν_k, ρ_k – постоянные, которые выражаются через g_{ki}, p_{ki}, а также через коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости [5]; c_i – постоянные, произвольные на одном из контуров области S.

Функции $\Phi_k(z_k)$ определены и голоморфны в областях S_k, получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (3) и ограниченных прямолинейными границами L_k^+, L_k^- и контурами L_{kl}, соответствующими при этих преобразованиях заданным контурам L^+, L^- и L_l. Исходя из общих представлений комплексных потенциалов [9], эти функции представим в виде

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{kln}\varphi_{kln}(z_k) + b_{kln}\varphi_{kln}^+(z_k) + c_{kln}\varphi_{kln}^-(z_k)\right], \tag{8}$$

в котором Γ_k – постоянные, определяемые решением систем линейных алгебраических уравнений

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left\{1,\ \mu_k,\ \mu_k^2,\ \frac{1}{\mu_k}\left[1 - \frac{\nu_k}{s_{22}}\left(g_{22} - \frac{2g_{12}+g_{26}}{2}\mu_k + \frac{g_{16}}{2}\mu_k^2\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\rho_k}{s_{22}}\left(p_{22} - \frac{2p_{12}+p_{26}}{2}\mu_k + \frac{p_{16}}{2}\mu_k^2\right)\right],\ \nu_k,\ \mu_k\nu_k,\ \rho_k,\ \mu_k\rho_k\right\}\Gamma_k = \tag{9}$$
$$= \left\{0,\ 0,\ \sigma_x^\infty,\ \frac{s_{16}\sigma_x^\infty}{2s_{22}},\ 0,\ D_x^\infty,\ 0,\ B_x^\infty\right\};$$

$$\varphi_{kln}(z_k)=\frac{1}{\zeta_{kl}^{n}},\quad \varphi_{kln}^{+}(z_k)=\frac{1}{\left(\zeta_{kl}^{+}\right)^{n}},\quad \varphi_{kln}^{-}(z_k)=\frac{1}{\left(\zeta_{kl}^{-}\right)^{n}};$$

ζ_{kl}, ζ_{kl}^{+}, ζ_{kl}^{-} – переменные, определяемые из неявных зависимостей [10]

$$z_k=z_{k\,l}+R_{kl}\left(\zeta_{kl}+\frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}}\right); \tag{10}$$

$$z_k=-(\overline{\mu_k}-\mu_k)\,h^{+}+\overline{z_{kl}}+\overline{R_{kl}}\left(\zeta_{kl}^{+}+\frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}^{+}}\right); \tag{11}$$

$$z_k=(\overline{\mu_k}-\mu_k)\,h^{-}+\overline{z_{kl}}+\overline{R_{kl}}\left(\zeta_{kl}^{-}+\frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}^{-}}\right); \tag{12}$$

$$z_{kl}=x_{0l}+\mu_k\,y_{0l},$$

$$R_{kl}=\frac{a_l\left(\cos\varphi_l+\mu_k\sin\varphi_l\right)+ib_l\left(\sin\varphi_l-\mu_k\cos\varphi_l\right)}{2},$$

$$m_{kl}=\frac{a_l\left(\cos\varphi_l+\mu_k\sin\varphi_l\right)-ib_l\left(\sin\varphi_l-\mu_k\cos\varphi_l\right)}{2R_{kl}};$$

a_{kln}, b_{kln}, c_{kln} $\left(k=1,\ 4;\ \ l=\overline{1,\mathcal{L}},\ \ n=1,\ 2,\ ...\right)$ – неизвестные коэффициенты рядов Лорана. Последние определим из граничных условий на контурах отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\,\mathcal{L}}\right)$ и на отрезках прямолинейных границ L^{+}, L^{-}, где влияние L_l на напряженное состояние полосы значительно. Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянные c_l. Эта форма, полученная дифференцированием условий (4) по дуге s контуров и имеет вид

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}g_{ik}\delta_{k,s}\Phi'_{k}\left(t_k\right)=\frac{df_i(t)}{ds}, \tag{13}$$

в котором $\delta_{k,s}=\frac{dt_k}{ds}=\frac{x'+\mu_k y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$; x', y' – производные переменных (2) по параметру θ; s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки;

$$\Phi'_{k}\left(z_k\right)=\Gamma_k+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi'_{kln}\left(z_k\right)a_{kln}+\varphi'^{+}_{kln}\left(z_k\right)b_{kln}+\varphi'^{-}_{kln}\left(z_k\right)c_{kln}\right]; \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\varphi'_{kln}(z_k)&=-\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1}R_{kl}\left(\zeta_{kl}^{2}-m_{kl}\right)},\\
\varphi'^{+}_{kln}\left(z_k\right)&=-\frac{n}{\left(\zeta_{kl}^{+}\right)^{n-1}\overline{R_{kl}}\left(\left(\zeta_{kl}^{+}\right)^{2}-\overline{m_{kl}}\right)},\\
\varphi'^{-}_{kln}\left(z_k\right)&=-\frac{n}{\left(\zeta_{kl}^{-}\right)^{n-1}\overline{R_{kl}}\left(\left(\zeta_{kl}^{-}\right)^{2}-\overline{m_{kl}}\right)}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Граничным условиям (13) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [6–8]. Для этого выберем на контурах отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\,\mathcal{L}}\right)$ и на выбранных отрезках прямолинейных границ L^+, L^- систему точек $M_m\left(x_m,\ y_m\right)$ $\left(m=\overline{1,\ M}\right)$, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (8). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln}, b_{kln} и c_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}g_{ik}\delta_{k,s}\left[\varphi'_{kln}\left(t_{km}\right)a_{kln}+\varphi'^{+}_{kln}\left(t_{km}\right)b_{kln}+\varphi'^{-}_{kln}\left(t_{km}\right)_{kln}\right]= \\ =-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}g_{ik}\delta_{k,s}\Gamma_k\quad\left(i=1,\ 4;\ m=\overline{1,M}\right). \tag{16}$$

Систему (16) будем решать методом сингулярного разложения [11, 12]. После нахождения псевдорешений этой системы комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ станут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС по формулам [5]

$$\left(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}\right)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(\mu_k^2,\ 1,\ -\mu_k\right)\Phi'_k\left(z_k\right); \tag{17}$$

$$\left(D_x,\ D_y,\ E_x,\ E_y\right)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(\nu_k\mu_k,\ -\nu_k,\ r_k,\ \mu_k r_k\right)\Phi'_k\left(z_k\right); \tag{18}$$

$$\left(B_x,\ B_y,\ H_x,\ H_y\right)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(\rho_k\mu_k,\ -\rho_k,\ h_k,\ \mu_k h_k\right)\Phi'_k\left(z_k\right). \tag{19}$$

По основным характеристикам можно найти также напряжения и индукции на произвольных площадках с нормалью n и касательной s по известным формулам [13, 14]. При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей (КИНИН), используя формулы [15].

$$k_1^{\pm}=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left[\mu_k^2\sin^2\varphi_l+\cos^2\varphi_l+2\mu_k\sin\varphi_l\cos\varphi_l\right]M_{kl}, \\ k_2^{\pm}=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left[\left(1-\mu_k^2\right)\cos\varphi_l\sin\varphi_l-\mu_k\left(\cos^2\varphi_l-\sin^2\varphi_l\right)\right]M_{kl}, \tag{20}$$

где

$$M_{kl}=\mp\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pm1\right)^n n\,a_{kln}.$$

В качестве частных случаев из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). Эти решения получаются, если в приведенном решении принять равными нулю p_{ki}, ν_{ki} (в задаче ЭУ), g_{ki}, ν_{ki} (в задаче МУ) или и те и другие (в задаче ТУ). Но при проведении численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными [16]

$$g'_{ki} = \lambda_g g_{ki}, \quad p'_{ki} = \lambda_p p_{ki}, \quad \nu'_{ki} = \lambda_{gp} \nu_{ki},$$

где λ_g, λ_p, λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала. При этом для задач ЭМУ нужно принять $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$, а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими: $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ЭУ; $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач МУ; $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ТУ.

2. Описание результатов численных исследований. Проведены численные исследования ЭМУС пьезополосы из «слабо анизотропного и пьезоактивного» композита на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [17, 18], «сильно анизотропного и пьезоактивного» композита, упругие и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (материал М2) [19], композита, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют PZT-4, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ (М3) [19].

В численных исследованиях количество членов в рядах (14) для каждого отверстия L_p и количество точек M_p на этом контуре, для которых составлялись уравнения (16), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений и индукций на площадках, касательных к контурам, не были менее 10^{-3}, а соответствующих деформаций не менее 10^{-10}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указан-ных рядах оставлять от 10 до 100 членов, и на каждом из контуров и на отрезке длины 2 диаметра отверстия брать от 100 до 1000 «коллокационных точек».

В таблице 1 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ полосы с центральным круговым отверстием радиуса a_1 (рис. 2) с точностью до множителя p приведены значения напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c_1/a_1, где c_1 – длина перемычки между контуром отверстия и границей полосы. При этом характерными были точки $B\ (a_1,\ 0)$, $C\ (0,\ a_1)$ $D\ (0,\ a_1 + c_1/2\ )$, $E^+\ (0,\ a_1 + c_1)$, $K^+\ (a_1,\ a_1 + c_1)$, $M^+\ (2a_1,\ a_1 + c_1)$. Для некоторых значений c_1/a_1 на рисунке 3 изображены графики

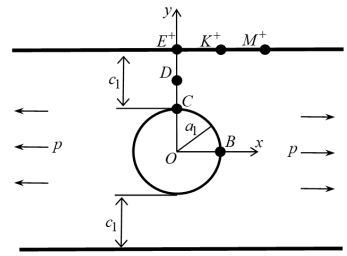

Рис. 2.

распределения нормальных напряжений σ_s около контура отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру (из-за имеющейся симметрии только для точек первой четверти), а на рисунке 4 напряжений σ_x по отрезку прямолинейной границы.

Таблица 1. Значения напряжений в точках полосы с центральным круговым отверстием в зависимости от c_1/a_1

Точка	Величина	Задача	c_1/a_1						
			∞	5	2	1	0,5	0,1	0,05
B	σ_y	ЭМУ	-0,866	-0,915	-1,065	-1,267	-1,456	-1,463	-1,336
		ЭУ	-0,885	-0,933	-1,074	-1,250	-1,401	-1,373	-1,221
		МУ	-1,190	-1,272	-1,513	-1,810	-2,079	-2,123	-1,772
		ТУ	-1,205	-1,292	-1,517	-1,788	-2,029	-1,961	-1,742
C	σ_x	ЭМУ	3,133	3,197	3,528	4,287	5,883	16,281	27,011
		ЭУ	2,573	2,654	2,992	3,728	5,277	15,721	25,919
		МУ	2,751	2,819	3,162	3,924	5,527	16,210	24,943
		ТУ	2,377	2,467	2,801	3,547	5,151	15,400	25,494
D	σ_x	ЭМУ	1,000	1,058	1,278	1,723	2,552	7,744	13,116
		ЭУ	1,000	1,058	1,267	1,732	2,628	7,966	13,108
		МУ	1,000	1,061	1,299	1,760	2,601	7,992	12,363
		ТУ	1,000	1,066	1,293	1,778	2,672	7,892	12,970
E^+	σ_x	ЭМУ	1,000	0,950	0,832	0,663	0,490	0,181	0,078
		ЭУ	1,000	0,963	0,855	0,663	0,436	0,350	0,406
		МУ	1,000	0,946	0,819	0,660	0,532	0,387	0,273
		ТУ	1,000	0,963	0,837	0,652	0,444	0,493	0,528
K^+	σ_x	ЭМУ	1,000	0,965	1,071	1,604	2,640	4,532	4,517
		ЭУ	1,000	0,971	1,034	1,584	2,602	4,145	3,978
		МУ	1,000	0,967	1,115	1,691	2,691	4,385	3,962
		ТУ	1,000	0,977	1,085	1,677	2,658	3,968	3,778
M^+	σ_x	ЭМУ	1,000	1,005	1,317	1,673	1,777	1,368	1,179
		ЭУ	1,000	0,997	1,307	1,669	1,696	1,254	1,048
		МУ	1,000	1,018	1,344	1,603	1,593	1,162	0,911
		ТУ	1,000	1,015	1,343	1,592	1,541	1,053	0,872

Из данных о таблице 1, рисунках 3 и 4 следует, что при уменьшении ширины полосы (длины перемычек между отверстием и прямолинейными границами) значения напряжений в точках перемычек, кроме ближайших окрестностей точек прямолинейных границ, резко растут, достигая при малых длинах перемычек весьма больших значений; при этом в точках перемычек вблизи прямолинейных границ напряжения уменьшаются. Вдали от перемычек, как около контура отверстия, так и на прямолинейной границе значения напряжений при уменьшении длины перемычек изменяются незначительно. Влияние отверстия

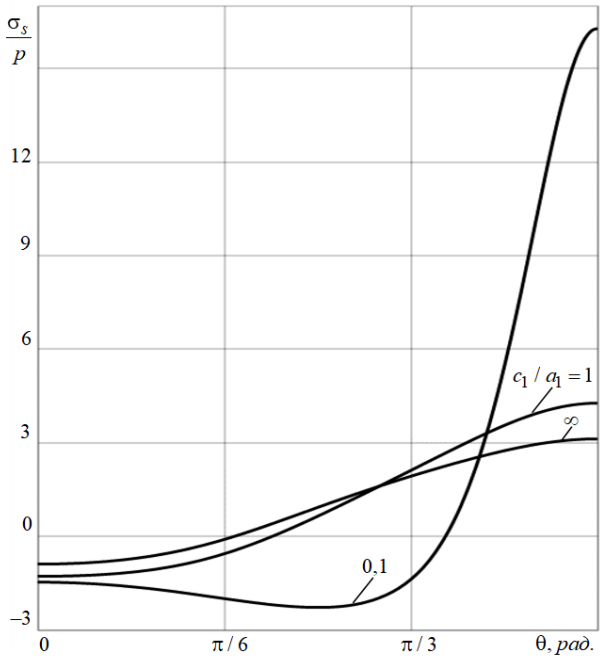

Рис. 3.

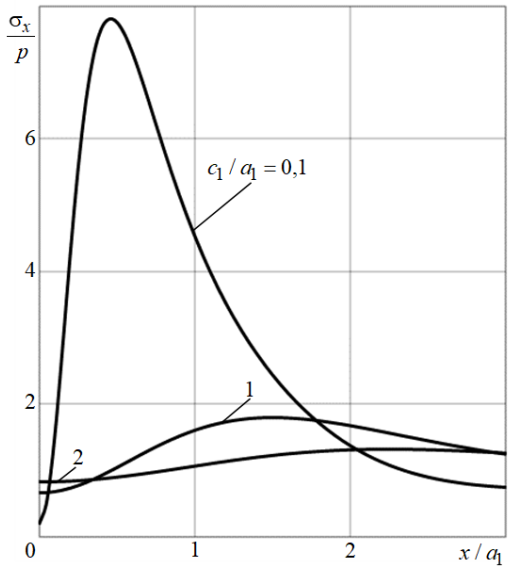

Рис. 4.

на напряженное состояние около прямолинейных границ значительно на расстояниях менее диаметра отверстия от перемычек. Учет электромагнитных свойств несколько повышает значения напряжений в зонах наибольшей концентрации

напряжений, учет только магнитных свойств уменьшает значения напряжений.

В таблице 2 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ пьезополосы (задача ЭМУ) с произвольным круговым отверстием радиуса a_1 (рис. 5) с точностью до множителя p приведены значения напряжений в некоторых характерных точках в зависимости от отношения c_1/a_1, где c_1 – длина перемычки между контуром отверстия и верхней границей полосы. При этом ширина полосы равна $4a_1$, $c_2 = 2a_1 - c_1$, а характерными были точки $A(0,-a_1)$, $B(a_1,0)$, $C(0,a_1)$, $E^+(0,a_1+c_1)$, $K^+(a_1,a_1+c_1)$, $M^+(2a_1,a_1+c_1)$, $E^-(0,-a_1-c_2)$, $K^-(a_1,-a_1-c_2)$, $M^-(2a_1,-a_1-c_2)$. Результаты для $c_1/a_1 = 1,5$ соответствуют случаю полосы с центральным отверстием, отрицательные значения c_1/a_1 относятся к полосе с круговым выемом глубины $2a_1 + c_1$, например, $c_1/a_1 = -1$ соответствует случаю, когда отверстие выходит на край до его горизонтального диаметра.

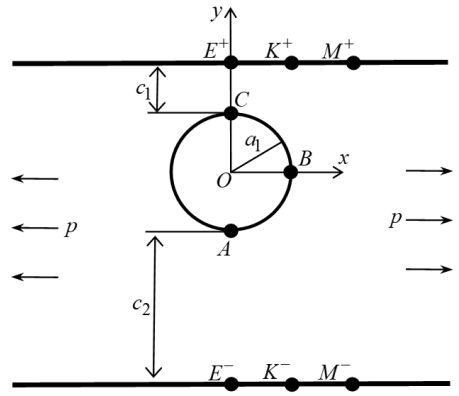

Рис. 5

Как видно из таблицы 2, при приближении отверстия к верхней прямолинейной границе полосы (с уменьшением c_1/a_1) закономерности изменения значений напряжений в окрестности верхней перемычки такие же, как и в случае центрального отверстия; при этом в точках окрестности нижней перемычки значения напряжений значительно меньше и они изменяются незначительно, за исключением точек нижней прямолинейной границы, где напряжения изменяются значительно; выход отверстия на верхнюю границу полосы сопровождается появлением зон сжатия (отрицательных значений напряжений) как на верхней, так и на нижней границе полосы вблизи перемычек; с уменьшение глубины

Таблица 2. Значения напряжений в точках полосы с круговым отверстием или выемом в зависимости от c_1/a_1

Точка	Величина	c_1/a_1									
		1	0,5	0,1	0,05	-0,05	-0,2	-0,5	-0,7	-0,9	-1
A	σ_x	4,287	4,197	5,173	5,577	6,941	6,167	3,884	1,004	0,882	0,123
B	σ_y	-1,267	-1,303	-1,113	-0,926	-0,132	-0,116	-0,082	-0,006	0,005	-
C	σ_x	4,287	5,743	14,587	21,789	-	-	-	-	-	-
E^+	σ_x	0,663	0,629	0,442	0,304	-	-	-	-	-	-
K^+	σ_x	1,604	2,702	4,143	3,493	-0,005	-0,002	0,001	0,001	0,001	-
M^+	σ_x	1,673	1,826	1,306	0,939	-0,103	-0,060	0,025	0,157	0,292	0,760
E^-	σ_x	0,663	0,620	0,180	0,044	-0,532	-0,301	0,247	0,665	0,742	1,080
K^-	σ_x	1,604	1,103	0,644	0,511	0,076	0,170	0,462	0,810	0,838	1,044
M^-	σ_x	1,673	1,441	1,202	1,114	0,982	0,916	0,841	1,064	0,994	0,982

выема (с уменьшением c_1/a_1) резко уменьшаются значения напряжений около точек выема с незначительным изменением из значений вблизи нижней границы полосы.

В таблице 3 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ полосы из материала М3 с круговым отверстием радиуса a_1 и краевой трещиной длины $l_2 = a_1$ (рис. 6) с точностью до множителя p приведены значения напряжений и КИН k_1^+ в некоторых характерных точках в зависимости от отношения c_1/a_1, где c_1 – длина перемычки между вершиной трещины и верхней границей полосы. При этом ширина полосы равна $5a_1$, а $c_2 = 2a_1 - c_1$. Характерными были точки $A(0, -a_1)$, $B(a_1, 0)$, $F(0, 2a_1)$, $E^+(0, 2a_1 + c_1)$, $K^+(a_1, 2a_1 + c_1)$, $M^+(2a_1, 2a_1+c_1)$, $E^-(0, -a_1-c_2)$, $K^-(a_1, -a_1-c_2)$, $M^-(2a_1, -a_1 - c_2)$. Отрицательные значения c_1/a_1 относятся к случаям разреза между отверстием и верхней границей полосы, например, $c_1/a_1 = -0,5$ относится к случаю, когда глубина разреза равна половине радиуса отверстия.

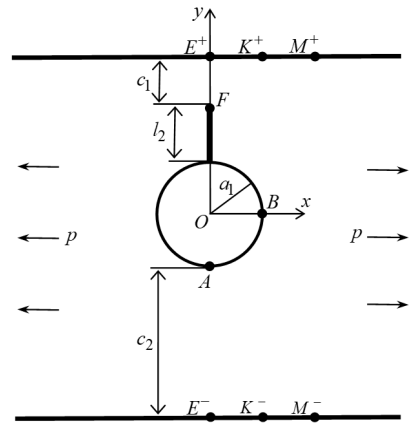

Рис. 6

Из таблицы 3 видно, что при приближении отверстия с краевой трещиной в перемычке с верхней прямолинейной границей полосы закономерности изменения значений напряжений в окрестности верхней перемычки такие же, как и в случае приближения отверстия без трещины.

Только выход трещины на верхнюю прямолинейную границу сопровождается более резкими изменениями напряженного состояния около этой границы, вплоть до возникновения вблизи точек перемычки зон отрицательных напряжений (сжатия).

Таблица 3. Значения напряжений и КИН в полосе с круговым отверстием и краевой трещиной из него в зависимости от c_1/a_1

Точка	Величина	c_1/a_1									
		1	0,5	0,3	0,1	0,05	-0,05	-0,1	-0,2	-0,3	-0,5
A	σ_x	5,198	4,399	4,269	3,186	2,007	8,214	6,710	5,085	3,888	3,504
B	σ_y	-1,441	-1,217	-1,110	-0,687	-0,323	-0,232	-0,525	-1,455	-1,345	-1,108
F	k_1^+	0,416	0,721	1,046	2,588	-20,671	-	-	-	-	-
E^+	σ_x	0,513	0,237	0,148	-0,067	-0,285	-	-	-	-	-
K^+	σ_x	1,801	2,208	2,486	1,522	0,439	0,123	0,567	4,039	3,277	1,937
M^+	σ_x	1,832	1,599	1,591	0,849	0,171	-0,049	0,258	1,920	1,997	1,685
E^-	σ_x	0,661	0,693	0,610	0,563	0,362	-0,266	-0,129	0,476	0,771	0,859
K^-	σ_x	1,750	1,200	0,924	0,734	0,717	0,220	0,307	0,821	0,962	0,934
M^-	σ_x	1,934	1,570	1,298	1,004	1,201	0,962	1,065	1,291	1,226	1,045

Выводы. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости решена задача об ЭМУС пьезополосы с произвольными отверстиями и трещинами, в том числе с пересекающимися контурами и пересекающих прямолинейные границы полосы. При этом граничные условия на как на контурах отверстий, так и на прямолинейных границах удовлетворены обобщенным методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием и для полосы с круговым отверстием и краевой трещиной из его контура в перемычке. Для указанных задач установлены закономерности влияния геометрических характеристик отверстия и трещины, их взаиморасположения на значения напряжений.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ FRRE-2026-0021).

Список литературы

1. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностр. лит., 1949. – 717 с.
2. *Берлинкур Д.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. — Т. 1, ч. А. — С. 204–326.
3. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов и др. – М.: Изд-во «Академия Естествознания», 2006. – 296 с.
4. *Пятаков А.П.* Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. *Калоеров С.А.* Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток. – 2011. – 232 с.
6. *Калоеров С.А.* Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. –№ 3 (48). – С. 103–116.
7. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. *Калоеров С.А.* Основные соотношения для комплексных потенциалов электромагнитовязкоупругости и их использование при решении задач о действии сосредоточенных сил / С.А. Калоеров, М.А. Полянский // Изв. РАН. Механика твердого тела. -– 2025. — № 6. — С. 152–175. DOI: 10.7868/S3034543X25060097
10. *Калоеров С.А.* Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
11. *Drmac Z.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342.
12. *Drmac Z.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362.
13. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
14. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
15. *Калоеров С.А.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. — 2007. — Т. 43, № 6. — С. 56–62.
16. *Калоеров С.А.* Задачи электроупругругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких

плит, как частные случаи задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.
17. *Yamamoto Y.* Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
18. *Tian W.-Y.* Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
19. *Hou P.F.* Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng , H.-R. Chen // Mech. Mater. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

S.A. Kaloerov, M.A. Polianskii

Electromagnetic elastic state of a strip with holes, cracks, and recesses.

Electromagnetic-elastic state of a strip with holes, cracks, and notches. The solution of the problem of the electromagnetic-elastic state of a strip with arbitrary elliptical holes, including those that turn into cracks, with intersecting contours and intersecting straight-line boundaries, is presented. The solution is constructed using complex potentials, Laurent series expansions of functions, and satisfying the boundary conditions using the generalized least squares method, which reduces the problem to an overdetermined system of linear algebraic equations that can be solved using the singular value decomposition method. The results of numerical studies are described for a strip with a circular hole, with a circular hole and an edge crack from its contour. The cases of a strip with a circular notch on one rectilinear border, with a circular hole and a cut between them and the rectilinear border are considered. The patterns of changes in the main characteristics of the electromagnetelastic state of the strip, depending on the geometric characteristics, are studied.

Keywords: *electromagnetically elastic plate, strip, holes, cracks, complex potentials, generalized least squares method.*

References

1. Cady, W. (1949). *Piezoelectricity and its practical applications*. Moscow: Foreign Literature Publishing House. 717 p. (In Russian)
2. Berlincourt D.A., Curran D.R. & Jaffe H. (1964) Piezoelectric and Piezomagnetical Materials and Their Function in Transducers. In: Mason W.P. (ed.) *Physical Acoustics*. 1A, 169–270.
3. Bichurin, M.I., Petrov, V.M., Filippov, D.A., et al. (2006). *Magnetoelectric materials*. Moscow: Academy of Natural Sciences. 296 p. (In Russian)
4. Pyatakov, A.P. (2006). [Magnetoelectric materials and their practical applications]. *Bulletin Ros. Magnit. Obshchestva*, 5(2), 1–3. (In Russian)
5. Kaloerov, S.A., & Petrenko, A.V. (2011). *Two-dimensional problems of electromagnetoelasticity for multiply connected bodies*. Donetsk: Yugo-Vostok. 232 p. (In Russian)
6. Kaloerov, S.A., & Parshikova, O.A. (2012). Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plate. *International Applied Mechanics*, 48(3), 319–331.
7. Voevodin, V.V. (1977). *Computational foundations of linear algebra*. Moscow: Nauka. 304 p. (In Russian)
8. Forsythe G.E., Malcolm M.A. & Moler C.B. (1977) *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 259 p.
9. Kaloerov, S.A., & Polyansky, M.A. (2025). [Fundamental relations for complex potentials of electromagnetoviscoelasticity and their application to problems of concentrated forces]. *Mechanics of Solids*, 6, 152–175. DOI: 10.7868/S3034543X25060097. (In Russian)
10. Kaloerov, S.A., & Goryanskaya, E.S. (1995). [Two-dimensional stress state of a multiply connected anisotropic body with cavities and cracks]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 25, 45–56. (In Russian)
11. Drmac, Z., & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 29(4), 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.

12. Drmac, Z., & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 29*(4), 1343–1362. https://doi.org/10.1137/05063920X
13. Lekhnitskii, S.G. (1977). *Theory of elasticity of an anisotropic body.* Moscow: Nauka. 416 p. (In Russian)
14. Muskhelishvili, N.I. (1966). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* Moscow: Nauka. 708 p. (In Russian)
15. Kaloerov, S.A. (2007). Determining the intensity factors for stresses , electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media. *International Applied Mechanics*, 43(6), 631–637.
16. Kaloerov, S. A. (2019). Problems of electroelastic, magnetoelastic, and elastic bending of thin plates as special cases of electromagnetoelastic bending. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 3–4, 58–79. (In Russian)
17. Yamamoto, Y., & Miya, K. (1987). *Electromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures.* Amsterdam: Elsevier Science-North Holland. 450 p.
18. Tian, W.-Y., & Gabbert, U. (2004). Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23, 599–614.
19. Hou, P.F., Teng, G.-H., & Chen, H.-R. (2009). Three-dimensional Green's function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material. *Mechanics of Materials*, 41, 329–338.

Поступила в редакцию / Original submitted 03.03.2026.
Доработана / Revision submitted 16.03.2026.
Рекомендована к печати / Accepted 24.03.2026.