

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-86-106

EDN:HNGFKK



©2025. А.И. Дзундза<sup>1</sup>, Н.Ю. Мельничук<sup>2</sup>, И.А. Моисеенко<sup>3</sup>,  
Р.Н. Нескородев<sup>4</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПОЛЫХ ЦИЛИНДРАХ С МНОГОФАКТОРНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

С использованием предложенных вариантов модели функциональной неоднородности решена задача построения базисного набора аналитических частных решений математической модели, описывающей процесс распространения неосесимметричных упругих нормальных волн в функционально-градиентных полых изотропных цилиндрах кольцевого поперечного сечения. Изучены свойства таких волн в аспекте влияния вида функциональной неоднородности материала волновода на топологию дисперсионных спектров, фазовые и групповые скорости бегущих волн.

**Ключевые слова:** функционально-градиентный материал, многофакторная неоднородность, полый цилиндрический волновод, изотропия, нормальные волны, аналитические базисные частные решения, дисперсионный спектр, фазовая скорость, групповая скорость.

---

<sup>1</sup>Дзундза Алла Ивановна – докт. пед. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: alladzundza@mail.ru.

*Dzundza Alla Ivanovna* – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Мельничук Наталья Юрьевна – мл. науч. сотр. НОМЦ «Математический центр ДонГУ», Донецк, e-mail: nata-250396@yandex.ru.

*Melnichuk Natalia Iurievna* – Junior Researcher, Donetsk State University Mathematical Center, Donetsk.

<sup>3</sup>Моисеенко Игорь Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

*Moiseyenko Igor Alekseevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>4</sup>Нескородев Роман Николаевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nromn72@mail.ru.

*Neskorodev Roman Nikolaevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

**Введение и цели исследования.** Теоретические исследования в области волновой динамики, как правило, предполагают построение базисных наборов аналитических частных решений дифференциальных уравнений для соответствующих пространственных моделей. В случае изучения волновых процессов в полых протяженных цилиндрах из инновационных функционально-градиентных материалов плодотворным оказался подход, связанный с заданием специального вида функциональных законов изменения физико-механических характеристик материала волновода и привлечение аппарата рядов по обобщенной кольцевой координате. Так, для единого двухпараметрического экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности материала волновода построены в аналитическом виде базисные наборы частных решений уравнений модели для случаев изотропного [1], трансверсально-изотропного [2] и ортотропного [3] материалов. Устранение лежащего в основе представленных исследований ограничения, связанного с единообразным видом функциональных законов неоднородности, лежит в области привлечения многофакторных моделей функциональной радиальной неоднородности. В работе [4] на базе введенных специальных двух- и трехфакторных моделей неоднородности, свободных от ограничений на независимый вид функциональных законов изменения физико-механических характеристик изотропного материала волновода, построены базисные наборы аналитических частных решений уравнений математической модели для двух типов осесимметричных нормальных упругих волн, распространяющихся в протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения. В данном исследовании указанная трехфакторная модель неоднородности применена для построения базисного набора аналитических частных решений уравнений математической модели в случае неосесимметричного волнового процесса в протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается цилиндрический волновод, в поперечном сечении представляющий собой концентрическое круговое кольцо с внутренним  $R_1$  и внешним  $R_2$  радиусами. Вводится безразмерная, нормированная параметром  $R_* = (R_1 + R_2)/2$ , цилиндрическая система координат  $Or\theta z$ , в которой волновод занимает область

$$V = \{r \in [1 - h, 1 + h], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\},$$

где  $h = (R_2 - R_1)/(R_1 + R_2)$  ( $0 < h < 1$ ). Изотропный материал волновода полагается функционально-неоднородным

$$\lambda(r) = C_* \tilde{\lambda}(r), \mu(r) = C_* \tilde{\mu}(r), \rho(r) = \rho_* \tilde{\rho}(r),$$

где

$$\tilde{\lambda}(r) > 0, \tilde{\mu}(r) > 0, \tilde{\rho}(r) > 0 \quad (r \in [1 - h, 1 + h]). \quad (1)$$

Здесь параметры  $C_* = const$  и  $\rho_* = const$  имеют размерность соответственно упругих модулей Ламе и плотности, а функциональные законы  $\tilde{\lambda}(r)$ ,  $\tilde{\mu}(r)$ ,  $\tilde{\rho}(r)$

полагаются произвольными в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик и относятся к классу  $C^2(1-h, 1+h)$ .

Исследование распространяющихся вдоль оси  $Oz$  с круговой частотой  $\omega$ , нормированным параметром  $R_*$  продольным волновым числом  $k$  ( $k \in \mathbb{C}$ ) и окружным волновым числом  $\tau$  ( $\tau \in \mathbb{N}$ ) неосесимметричных нормальных упругих волн реализуется в рамках пространственной линейной математической модели волновой динамики. Для построения решений указанной модели допускается применение метода разделения переменных.

Вводится замена переменных  $r = \eta(x) = 1 + hx$ , где  $x \in [-1, 1]$  – обобщенная кольцевая координата [5]. В новой системе координат  $Ox\theta z$  соотношения (1) переписываются следующим образом:

$$\tilde{\lambda}(x) > 0, \tilde{\mu}(x) > 0, \tilde{\rho}(x) > 0 \quad (x \in [-1, 1]). \quad (2)$$

Соотношения математической модели в матрично-векторном виде получают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, \theta, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U \mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x), \\ \mathbf{\Sigma}(x, \theta, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(x); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, \theta, z, t) &= [u_r(x, \theta, z, t), u_\theta(x, \theta, z, t), u_z(x, \theta, z, t)]^T, \\ \mathbf{\Sigma}(x, \theta, z, t) &= [\sigma_{rr}(x, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(x, \theta, z, t), \sigma_{zz}(x, \theta, z, t), \\ &\quad \sigma_{\theta z}(x, \theta, z, t), \sigma_{rz}(x, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(x, \theta, z, t)]^T; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x) = [\tilde{u}_r^{(\tau)}(x), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(x), \tilde{u}_z^{(\tau)}(x)]^T, \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(x) = [\tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(x)]^T.$$

Здесь  $\tilde{u}_s^{(\tau)}(x)$  ( $s = r, \theta, z$ ) и  $\tilde{\sigma}_s^{(\tau)}(x)$  ( $s = rr, \theta\theta, zz, \theta z, rz, r\theta$ ) – вещественные радиальные амплитудные составляющие соответствующих компонент волнового процесса;  $\mathbf{P}_U$  и  $\mathbf{P}_\Sigma$  – квадратные диагональные матрицы комплексной нормировки с элементами

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_U]_{1,1} &= [\mathbf{P}_U]_{2,2} = 1, [\mathbf{P}_U]_{3,3} = i, \\ [\mathbf{P}_\Sigma]_{j,j} &= 1 \quad (j = 1, 2, 3, 6), [\mathbf{P}_\Sigma]_{j,j} = i \quad (j = 4, 5); \end{aligned} \quad (6)$$

$\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)$  и  $\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)$  – квадратные диагональные функциональные матрицы зависимости от угловой координаты с элементами

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{1,1} &= [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{3,3} = \cos(\tau\theta), [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{2,2} = \sin(\tau\theta), \\ [\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} &= \cos(\tau\theta) \quad (j = 1, 2, 3, 5), \\ [\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} &= \sin(\tau\theta) \quad (j = 4, 6). \end{aligned} \quad (7)$$

Векторные функции  $\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(x)$  и  $\tilde{U}^{(\tau)}(x)$  связаны дифференциальным соотношением

$$\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(x) = \tilde{\mathbf{G}}(x) \left( \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \cdot \tilde{U}^{(\tau)}(x) \right), \quad (8)$$

где  $\tilde{\mathbf{G}}(x)$  – матрица упругих модулей Гука размерности  $6 \times 6$  с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{\mathbf{G}}(x) \right]_{n,m} &= \tilde{\lambda}(x) \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ \left[ \tilde{\mathbf{G}}(x) \right]_{j,j} &= \tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \left[ \tilde{\mathbf{G}}(x) \right]_{j,j} = \tilde{\mu}(x) \quad (j = \overline{4, 6}); \end{aligned} \quad (9)$$

$\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x)$  – матричный размерности  $6 \times 3$  дифференциальный оператор с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \right]_{1,1} &= h^{-1}d_x, \quad \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \right]_{2,1} = \eta(x)^{-1}, \quad \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \right]_{2,2} = \tau\eta(x)^{-1}, \\ \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \right]_{3,3} &= -k, \quad \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \right]_{4,2} = k, \quad \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \right]_{4,3} = -\tau\eta(x)^{-1}, \\ \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \right]_{5,1} &= k, \quad \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \right]_{5,3} = h^{-1}d_x, \\ \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \right]_{6,1} &= -\tau\eta(x)^{-1}, \quad \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x) \right]_{6,2} = h^{-1}d_x - \eta(x)^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения движения преобразуются к виду

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(x) \cdot \tilde{U}^{(\tau)}(x) = \mathbf{O}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{O}$  – нулевой вектор-столбец размерности 3;  $\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(x)$  – матричный размерности  $3 \times 3$  дифференциальный оператор с элементами

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(x) \right]_{mm} &= d_x^2 + \tilde{f}_{mm}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}_{mm}^{(2)}(x) \quad (m = \overline{1, 3}), \\ \left[ \tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(x) \right]_{mn} &= \tilde{f}_{mn}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}_{mn}^{(2)}(x) \quad (m \neq n = \overline{1, 3}). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{11}^{(1)}(x) &= \frac{h}{\eta(x)} + \frac{\lambda'(x) + 2\mu'(x)}{\lambda(x) + 2\mu(x)}, \\ \tilde{f}_{11}^{(2)}(x) &= -\frac{h^2}{\eta(x)^2} + \frac{h^2 \left( \Omega^2 \tilde{\rho}(x) - \tilde{\mu}(x) \left( k^2 + \tau^2 \eta(x)^{-2} \right) \right) + h\eta(x)^{-1} \tilde{\lambda}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \\ \tilde{f}_{12}^{(1)}(x) &= \frac{h\tau}{\eta(x)} \left( 1 - \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)} \right), \\ \tilde{f}_{12}^{(2)}(x) &= -\frac{h\tau}{\eta(x)^2} \left( h + \frac{h\tilde{\mu}(x) - \eta(x) \tilde{\lambda}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{13}^{(1)}(x) &= -hk \left( 1 - \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)} \right), \quad \tilde{f}_{13}^{(2)}(x) = -\frac{hk\tilde{\lambda}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \\ \tilde{f}_{21}^{(1)}(x) &= -\frac{h\tau}{\eta(x)} \left( 1 - \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \quad \tilde{f}_{21}^{(2)}(x) = -\frac{h\tau}{\eta(x)^2} \left( 3h + \frac{h\tilde{\lambda}(x) + \eta(x)\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \\ \tilde{f}_{22}^{(1)}(x) &= \frac{h}{\eta(x)} + \frac{\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)}, \\ \tilde{f}_{22}^{(2)}(x) &= h \left( h \left( \Omega^2 \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\mu}(x)} - k^2 \right) - \frac{\tilde{\mu}'(x)}{\eta(x)\tilde{\mu}(x)} - \frac{h}{\eta(x)^2} \left( 1 + \tau^2 \left( 2 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right) \right) \right), \\ \tilde{f}_{23}^{(1)}(x) &= 0, \quad \tilde{f}_{23}^{(2)}(x) = -\frac{h^2k\tau}{\eta(x)} \left( 1 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \\ \tilde{f}_{31}^{(1)}(x) &= hk \left( 1 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \quad \tilde{f}_{31}^{(2)}(x) = hk \left( \frac{h}{\eta(x)} \left( 1 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right) + \frac{\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \\ \tilde{f}_{32}^{(1)}(x) &= 0, \quad \tilde{f}_{32}^{(2)}(x) = \frac{h^2k\tau}{\eta(x)} \left( 1 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \\ \tilde{f}_{33}^{(1)}(x) &= \frac{h}{\eta(x)} + \frac{\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)}, \quad \tilde{f}_{33}^{(2)}(x) = h^2 \left( \Omega^2 \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\mu}(x)} - k^2 \left( 2 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right) - \frac{\tau^2}{\eta(x)^2} \right), \end{aligned}$$

$\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$  – безразмерная приведённая частота.

Математическая модель (2) – (11) дополняется граничными условиями для случая свободного

$$\tilde{\sigma}_s^{(\tau)}(\pm 1) = 0 \quad (s = rr, rz, r\theta) \quad (12)$$

либо жестко закрепленного

$$\tilde{u}_s^{(\tau)}(\pm 1) = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (13)$$

волновода.

**2. Модель радиальной неоднородности.** Следуя работе [4] вводятся: декартова система координат  $Oxy$  и комплексная переменная  $\xi = x + iy$ ; произвольные функции  $\psi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 3}$ ), аналитические в области  $|\xi| < \delta$  ( $\delta > 1$ ); два типа моделей неоднородности для функциональных законов (2), аналогичных представленным в указанной работе для случая осесимметричных волн продольно-сдвигового типа.

Аналитическая модель неоднородности. Применима в случае, когда функции  $\tilde{\lambda}(x)$ ,  $\tilde{\mu}(x)$  и  $\tilde{\rho}(x)$  допускают аналитическое продолжение в аналитические в области  $|\xi| < \delta$  ( $\delta > 1$ ) функции. Соотношения модели имеют вид

$$\psi_1(\xi) = \hat{\lambda}(\xi), \quad \psi_2(\xi) = \hat{\mu}(\xi), \quad \psi_3(\xi) = \hat{\rho}(\xi). \quad (14)$$

Численная модель неоднородности. Имеет два альтернативных вида и реализуется с применением полиномиальных аппроксимаций так:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &\approx \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \quad \psi_2(x) \approx \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \\ \psi_3(x) &\approx \ln\left(\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)\right) \quad (x \in [-1, 1]); \end{aligned} \quad (15-A)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &\approx \tilde{\lambda}(x)/\tilde{\mu}(x), \quad \psi_2(x) \approx \tilde{\rho}(x)/\tilde{\mu}(x), \quad \psi_3(x) \approx \ln(\tilde{\mu}(x)) \\ &(x \in [-1, 1]). \end{aligned} \quad (15-B)$$

Здесь

$$\psi_j(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (16)$$

В работе [4] приведены условия определения порядка полиномов в соотношениях (16), а также для каждого типа модели неоднородности сформулированы достаточные условия несильной радиальной неоднородности, при выполнении которых дифференциальный оператор  $\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(x)$  допускает аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной  $\xi$  в дифференциальный оператор  $\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi)$  с аналитическими в области  $|\xi| < \delta$  ( $\delta > 1$ ) функциональными коэффициентами  $\hat{f}_{nm}^{(j)}(\xi)$  ( $j = \overline{1, 2}$ ;  $n, m = \overline{1, 3}$ ).

В случае соотношений (14) представления для  $\hat{f}_{nm}^{(j)}(\xi)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{f}_{11}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1}(\chi_1(\xi) + 2\chi_2(\xi)) + \chi_7(\xi) + 2\chi_8(\xi), \\ \hat{f}_{11}^{(2)}(\xi) &= -h\eta(\xi)^{-2}\left(h\left(\chi_1(\xi) + \left(2 + \tau^2 + k^2\eta(\xi)^2\right)\chi_2(\xi)\right) - \right. \\ &\quad \left. - \eta(\xi)(h\Omega^2\eta(\xi)\chi_3(\xi) + \chi_7(\xi))\right), \\ \hat{f}_{12}^{(1)}(\xi) &= h\tau\eta(\xi)^{-1}(\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)), \\ \hat{f}_{12}^{(2)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-2}(h(\chi_1(\xi) + 3\chi_2(\xi)) - \eta(\xi)\chi_7(\xi)), \\ \hat{f}_{13}^{(1)}(\xi) &= -hk(\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)), \quad \tilde{f}_{13}^{(2)}(\xi) = -hk\chi_7(\xi), \\ \hat{f}_{21}^{(1)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-1}(\chi_4(\xi) + \chi_5(\xi)), \\ \hat{f}_{21}^{(2)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-2}(h(\chi_4(\xi) + 3\chi_5(\xi)) + \eta(\xi)\chi_{11}(\xi)), \\ \hat{f}_{22}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1}\chi_5(\xi) + \chi_{11}(\xi), \\ \hat{f}_{22}^{(2)}(\xi) &= -h\eta(\xi)^{-2}\left(h\left(\tau^2\chi_4(\xi) + \left(1 + 2\tau^2 + k^2\eta(\xi)^2\right)\chi_5(\xi)\right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta(\xi)(\chi_{11}(\xi) - h\Omega^2\eta(\xi)\chi_6(\xi))\right), \\ \hat{f}_{23}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{23}^{(2)}(\xi) = h^2k\tau\eta(\xi)^{-1}(\chi_4(\xi) + \chi_5(\xi)), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{31}^{(1)}(\xi) &= hk(\chi_4(\xi) + \chi_5(\xi)), \\
 \hat{f}_{31}^{(2)}(\xi) &= hk\left(h\eta(\xi)^{-1}(\chi_4(\xi) + \chi_5(\xi)) + \chi_{11}(\xi)\right), \\
 \hat{f}_{32}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{32}^{(2)}(\xi) = h^2k\tau\eta(\xi)^{-1}(\chi_4(\xi) + \chi_5(\xi)), \\
 \hat{f}_{33}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1}\chi_5(\xi) + \chi_{11}(\xi), \\
 \hat{f}_{33}^{(2)}(\xi) &= -h^2\left(k^2\chi_4(\xi) + \left(2k^2 + \tau^2\eta(\xi)^{-2}\right)\chi_5(\xi) - \Omega^2\chi_6(\xi)\right),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \chi_j(\xi) &= f_1(\xi)\psi_j(\xi) \quad (j = \overline{1,3}), \quad \chi_{j+3}(\xi) = f_2(\xi)\psi_j(\xi) \quad (j = \overline{1,3}), \\
 \chi_{j+6}(\xi) &= f_1(\xi)\psi'_j(\xi) \quad (j = \overline{1,3}), \quad \chi_{j+9}(\xi) = f_2(\xi)\psi'_j(\xi) \quad (j = \overline{1,3}), \\
 f_1(\xi) &= (\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi))^{-1}, \quad f_2(\xi) = \psi_2(\xi)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

В случае соотношений (15-А) либо (15-Б) представления для  $\hat{f}_{nm}^{(j)}(\xi)$  имеют соответственно такой вид:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{11}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} + \psi'_3(\xi), \\
 \hat{f}_{11}^{(2)}(\xi) &= -h\eta(\xi)^{-2}\left(h + h\left(\tau^2 + k^2\eta(\xi)^2\right)\psi_1(\xi) + 2\eta(\xi)\psi'_1(\xi) - \right. \\
 &\quad \left. - h\Omega^2\eta(\xi)^2\psi_2(\xi) - \eta(\xi)\psi'_3(\xi) + 2\eta(\xi)\phi_1(\xi)\right), \\
 \hat{f}_{12}^{(1)}(\xi) &= h\tau\eta(\xi)^{-1}(1 - \psi_1(\xi)), \\
 \hat{f}_{12}^{(2)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-2}\left(h(1 + \psi_1(\xi)) + \eta(\xi)(2\psi'_1(\xi) - \psi'_3(\xi) + 2\phi_1(\xi))\right), \\
 \hat{f}_{13}^{(1)}(\xi) &= hk(\psi_1(\xi) - 1), \\
 \hat{f}_{13}^{(2)}(\xi) &= hk(2\psi'_1(\xi) - \psi'_3(\xi) + 2\phi_1(\xi)), \\
 \hat{f}_{21}^{(1)}(\xi) &= h\tau\eta(\xi)^{-1}(1 - \chi_1(\xi)), \\
 \hat{f}_{21}^{(2)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-2}\left(h + \eta(\xi)\psi'_3(\xi) + h\chi_1(\xi) + \eta(\xi)\chi_3(\xi)\right), \\
 \hat{f}_{22}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} + \psi'_3(\xi) + \chi_3(\xi), \\
 \hat{f}_{22}^{(2)}(\xi) &= -h\eta(\xi)^{-2}\left(h\left(1 + k^2\eta(\xi)^2\right) + \eta(\xi)\psi'_3(\xi) + \right. \\
 &\quad \left. + h\tau^2\chi_1(\xi) - h\Omega^2\eta(\xi)^2\chi_2(\xi) + \eta(\xi)\chi_3(\xi)\right), \\
 \hat{f}_{23}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{23}^{(2)}(\xi) = h^2k\tau\eta(\xi)^{-1}(\chi_1(\xi) - 1), \\
 \hat{f}_{31}^{(1)}(\xi) &= hk(\chi_1(\xi) - 1), \\
 \hat{f}_{31}^{(2)}(\xi) &= hk\left(\psi'_3(\xi) + h\eta(\xi)^{-1}(\chi_1(\xi) - 1) + \chi_3(\xi)\right), \\
 \hat{f}_{32}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{32}^{(2)}(\xi) = h^2k\tau\eta(\xi)^{-1}(\chi_1(\xi) - 1), \\
 \hat{f}_{33}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} + \psi'_3(\xi) + \chi_3(\xi), \\
 \hat{f}_{33}^{(2)}(\xi) &= -h^2\left(\tau^2\eta(\xi)^{-2} + k^2\chi_1(\xi) - \Omega^2\chi_2(\xi)\right);
 \end{aligned} \tag{19-A}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{11}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} (2\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)) + \chi_4(\xi) + 2\chi_5(\xi) + \chi_6(\xi), \\
 \hat{f}_{11}^{(2)}(\xi) &= -h \left( h \left( \eta(\xi)^{-2} (2 + \tau^2) + k^2 \right) \chi_1(\xi) + \eta(\xi)^{-2} \chi_2(\xi) - \Omega^2 \chi_3(\xi) \right) - \\
 &\quad - \eta(\xi)^{-1} (\chi_4(\xi) + \chi_6(\xi)), \\
 \hat{f}_{12}^{(1)}(\xi) &= h\tau\eta(\xi)^{-1} (\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)), \\
 \hat{f}_{12}^{(2)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-1} \left( h\eta(\xi)^{-1} (3\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)) - \chi_4(\xi) - \chi_6(\xi) \right), \\
 \hat{f}_{13}^{(1)}(\xi) &= -hk (\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)), \quad \tilde{f}_{13}^{(2)}(\xi) = -hk (\chi_4(\xi) + \chi_6(\xi)), \\
 \hat{f}_{21}^{(1)}(\xi) &= h\tau\eta(\xi)^{-1} (1 + \psi_1(\xi)), \\
 \hat{f}_{21}^{(2)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-1} \left( h\eta(\xi)^{-1} (3 + \psi_1(\xi)) + \psi'_3(\xi) \right), \\
 \hat{f}_{22}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} + \psi'_3(\xi), \\
 \hat{f}_{22}^{(2)}(\xi) &= -h \left( h\eta(\xi)^{-2} (1 + \tau^2 (2 + \psi_1(\xi))) + \right. \\
 &\quad \left. + h (k^2 - \Omega^2 \psi_2(\xi)) + \eta(\xi)^{-1} \psi'_3(\xi) \right), \\
 \hat{f}_{23}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{23}^{(2)}(\xi) = h^2 k \tau \eta(\xi)^{-1} (1 + \psi_1(\xi)), \\
 \hat{f}_{31}^{(1)}(\xi) &= hk (1 + \psi_1(\xi)), \\
 \hat{f}_{31}^{(2)}(\xi) &= hk \left( h\eta(\xi)^{-1} (1 + \psi_1(\xi)) + \psi'_3(\xi) \right), \\
 \hat{f}_{32}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{32}^{(2)}(\xi) = h^2 k \tau \eta(\xi)^{-1} (1 + \psi_1(\xi)), \\
 \hat{f}_{33}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} + \psi'_3(\xi), \\
 \hat{f}_{33}^{(2)}(\xi) &= -h^2 \left( k^2 (\psi_1(\xi) + 2) - \Omega^2 \psi_2(\xi) + \tau^2 \eta(\xi)^{-2} \right).
 \end{aligned} \tag{19-Б}$$

В соотношениях (19-А) и (19-Б) используются вспомогательные функции, которые соответственно определены так:

$$\begin{aligned}
 \chi_1(\xi) &= \psi_1(\xi)^{-1}, \quad \chi_2(\xi) = \psi_1(\xi)^{-1} \psi_2(\xi), \\
 \chi_3(\xi) &= \psi_1(\xi)^{-1} \psi'_1(\xi), \quad \phi_1(\xi) = \psi_1(\xi) \psi'_3(\xi);
 \end{aligned} \tag{20-А}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_1(\xi) &= (2 + \psi_1(\xi))^{-1}, \quad \chi_2(\xi) = \chi_1(\xi) \psi_1(\xi), \\
 \chi_3(\xi) &= \chi_1(\xi) \psi_2(\xi), \quad \chi_4(\xi) = \chi_1(\xi) \psi'_1(\xi), \\
 \chi_5(\xi) &= \chi_1(\xi) \psi'_3(\xi), \quad \chi_6(\xi) = \chi_1(\xi) \psi_1(\xi) \psi'_3(\xi).
 \end{aligned} \tag{20-Б}$$

**3. Базисное частное решение.** В рамках представленной соотношениями (14), (15-А), (15-Б) модели неоднородности при выполнении соответствующих достаточных условий несильной радиальной неоднородности [4] дифференциальное уравнение (11) получает следующий вид:

$$\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(\tau)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta). \tag{21}$$

Известно [6], что матричное дифференциальное уравнение (21) имеет представленные в векторном виде частные решения

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{u}_r^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) \\ \hat{u}_\theta^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) \\ \hat{u}_z^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) \end{bmatrix} \quad (q = \overline{1, 6}) \quad (22)$$

с аналитическими в области  $|\xi| < \delta$  ( $\delta > 1$ ) элементами  $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$  ( $s = r, \theta, z$ ;  $q = \overline{1, 6}$ ). Указанные векторные решения строятся в виде разложений их элементов в области  $|\xi| < \delta$  ( $\delta > 1$ ). Водятся представления

$$\begin{aligned} \psi_j(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \phi_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(1)} \xi^n, \\ \chi_j(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 12}), \\ \hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(s, q)} \xi^n \quad (s = r, \theta, z; \quad q = \overline{1, 6}). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $\{a_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) – определяемые из соотношений (14) в случае аналитической модели неоднородности, из соотношений (15-А), (16) либо (15-Б), (16) в случае численной модели неоднородности наборы коэффициентов;  $\{g_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$  и  $\{b_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$  ( $j = \overline{1, 12}$ ) – наборы коэффициентов, определяемые из очевидных явных рекуррентных соотношений, полученных на основании представлений (18), либо (20-А), либо (20-Б);  $\{d_n^{(s, q)}\}_{n=0}^{\infty}$  ( $s = r, \theta, z$ ;  $q = \overline{1, 6}$ ) – подлежащие нахождению наборы коэффициентов. Следует отметить, что в случае представления функций  $\psi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) полиномами порядка  $N$ , в разложениях (23) указанных функций, а также функции  $\phi_1(\xi)$ , следует положить  $a_n^{(j)} = 0$  ( $j = \overline{1, 3}$ ;  $n = \overline{N+1, \infty}$ ),  $g_n^{(1)} = 0$  ( $n = \overline{2N, \infty}$ ).

После подстановки разложений (23) в представление (22), а также соответственно выбранной модели неоднородности в соотношения (17), либо (19-А), либо (19-Б), дифференциальное уравнение (21) преобразуется в однородное векторное функциональное уравнение

$$\hat{\mathbf{F}}^{(\tau)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta). \quad (24)$$

Здесь

$$\left[ \hat{\mathbf{F}}^{(\tau)}(\xi) \right]_m = \sum_{p=0}^{\infty} w_p^{(m)} \left( \left\{ d_n^{(s, q)} \right\}_{n=0}^p, \left\{ a_n^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{ b_p^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{ g_p^{(1)} \right\}_{n=0}^{\infty} \right) \xi^p \quad (m = \overline{1, 3})$$

аналитические в области  $|\xi| < \delta$  ( $\delta > 1$ ) функции. На основании свойств аналитических функций из уравнения (24) получается последовательность систем линейных алгебраических уравнений

$$w_p^{(m)} \left( \left\{ d_n^{(s,q)} \right\}_{n=0}^p, \left\{ a_n^{(j)} \right\}_{n=0}^\infty, \left\{ b_p^{(j)} \right\}_{n=0}^\infty, \left\{ g_p^{(1)} \right\}_{n=0}^\infty \right) = 0 \quad (m = \overline{1,3}), \quad (25)$$

$$(p = 0, 1, 2, \dots)$$

для определения искомых наборов коэффициентов  $\left\{ d_n^{(s,q)} \right\}_{n=0}^\infty$  ( $s = r, \theta, z; q = \overline{1,6}$ ).

При  $p = 0$  и  $p = 1$  из уравнений (25) для коэффициентов разложений элементов векторных частных решений  $\hat{U}^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$  ( $q = \overline{1,6}$ ) определяются начальные условия единого для всех представленных вариантов модели неоднородности вида:

$$\begin{aligned} & \left\{ d_0^{(r,1)} = 1, d_1^{(r,1)} = 0, d_0^{(\theta,1)} = 0, d_1^{(\theta,1)} = 0, d_0^{(z,1)} = 0, d_1^{(z,1)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,2)} = 0, d_1^{(r,2)} = 1, d_0^{(\theta,2)} = 0, d_1^{(\theta,2)} = 0, d_0^{(z,2)} = 0, d_1^{(z,2)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,3)} = 0, d_1^{(r,3)} = 0, d_0^{(\theta,3)} = 1, d_1^{(\theta,3)} = 0, d_0^{(z,3)} = 0, d_1^{(z,3)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,4)} = 0, d_1^{(r,4)} = 0, d_0^{(\theta,4)} = 0, d_1^{(\theta,4)} = 1, d_0^{(z,4)} = 0, d_1^{(z,4)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,5)} = 0, d_1^{(r,5)} = 0, d_0^{(\theta,5)} = 0, d_1^{(\theta,5)} = 0, d_0^{(z,5)} = 1, d_1^{(z,5)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,6)} = 0, d_1^{(r,6)} = 0, d_0^{(\theta,6)} = 0, d_1^{(\theta,6)} = 0, d_0^{(z,6)} = 0, d_1^{(z,6)} = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

При  $p \geq 2$  из неоднородных линейных систем уравнений (25) получаются явные рекуррентные соотношения для определения искомых коэффициентов  $d_p^{(s,q)}$  ( $s = r, \theta, z; q = \overline{1,6}$ ). В случае аналитической модели неоднородности (14), (17), (18) рекуррентные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} d_p^{(r,q)} = & -\frac{1}{p(p-1)} \left( 2h(p-1)(p-2)d_{p-1}^{(r,q)} + h^2(p-2)(p-3)d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \quad (27) \\ & \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left( h^4 \left( \Omega^2 b_{p-4-j}^{(3)} - k^2 b_{p-4-j}^{(2)} \right) d_j^{(r,q)} - kh^3 b_{p-4-j}^{(7)} d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left( h^2 \left( 2h \left( \Omega^2 b_{p-3-j}^{(3)} - k^2 b_{p-3-j}^{(2)} \right) + (j+1)b_{p-3-j}^{(7)} + 2jb_{p-3-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\ & \left. + \tau h^2 b_{p-3-j}^{(7)} d_j^{(\theta,q)} - kh^2 \left( hj \left( b_{p-3-j}^{(1)} + b_{p-3-j}^{(2)} \right) + 2b_{p-3-j}^{(7)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \\ & \left. + \sum_{j=0}^{p-2} \left( \left( h^2 \left( \Omega^2 b_{p-2-j}^{(3)} - (k^2 + \tau^2 - 2j + 2)b_{p-2-j}^{(2)} + (j-1)b_{p-2-j}^{(1)} \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h \left( (2j+1) b_{p-2-j}^{(7)} + 4j b_{p-2-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} + \\
& +h\tau \left( h \left( (j-1) b_{p-2-j}^{(1)} + (j-3) b_{p-2-j}^{(2)} \right) + b_{p-2-j}^{(7)} \right) d_j^{(\theta,q)} - \\
& -hk \left( 2hj \left( b_{p-2-j}^{(1)} + b_{p-2-j}^{(2)} \right) + b_{p-2-j}^{(7)} \right) d_j^{(z,q)} + \\
& + \sum_{j=0}^{p-1} \left( j \left( h \left( b_{p-1-j}^{(1)} + 2b_{p-1-j}^{(2)} \right) + b_{p-1-j}^{(7)} + 2b_{p-1-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\
& \left. + \tau hj \left( b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(\theta,q)} - khj \left( b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(z,q)} \right), \\
d_p^{(\theta,q)} = & -\frac{1}{p(p-1)} \left( 2h(p-1)(p-2) d_{p-1}^{(\theta,q)} + h^2(p-2)(p-3) d_{p-2}^{(\theta,q)} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left( h^4 \left( \Omega^2 b_{p-4-j}^{(6)} - k^2 b_{p-4-j}^{(5)} \right) d_j^{(\theta,q)} \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left( h^2 \left( -\tau b_{p-3-j}^{(11)} d_j^{(r,q)} + \left( 2h \left( \Omega^2 b_{p-3-j}^{(6)} - k^2 b_{p-3-j}^{(5)} \right) + (j-1) b_{p-3-j}^{(11)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \tau kh \left( b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(5)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
& + \sum_{j=0}^{p-2} \left( -h \left( \tau \left( h \left( (j+1) b_{p-2-j}^{(4)} + (j+3) b_{p-2-j}^{(5)} \right) + b_{p-2-j}^{(11)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - h \left( \Omega^2 b_{p-2-j}^{(6)} + (j-1 - k^2 - 2\tau^2) b_{p-2-j}^{(5)} - \tau^2 b_{p-2-j}^{(4)} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (2j-1) b_{p-2-j}^{(11)} \right) d_j^{(\theta,q)} - h\tau k \left( b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(5)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \left( j \left( -h\tau \left( b_{p-1-j}^{(4)} + b_{p-1-j}^{(5)} \right) d_j^{(r,q)} + \left( hb_{p-1-j}^{(5)} + b_{p-1-j}^{(11)} \right) d_j^{(\theta,q)} \right) \right), \\
d_p^{(z,q)} = & -\frac{1}{p(p-1)} \left( 2h(p-1)(p-2) d_{p-1}^{(z,q)} + h^2(p-2)(p-3) d_{p-2}^{(z,q)} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left( h^3 \left( kb_{p-4-j}^{(11)} d_j^{(r,q)} + h \left( \Omega^2 b_{p-4-j}^{(6)} - k^2 \left( b_{p-4-j}^{(4)} + 2b_{p-4-j}^{(5)} \right) \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left( h^2 \left( k \left( h(j+1) \left( b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(5)} \right) + 2b_{p-3-j}^{(11)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + h\tau k \left( b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(5)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( 2h \left( \Omega^2 b_{p-3-j}^{(6)} - k^2 \left( b_{p-3-j}^{(4)} + 2b_{p-3-j}^{(5)} \right) \right) + j b_{p-3-j}^{(11)} \right) d_j^{(z,q)} \Big) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-2} \left( h \left( k \left( h(2j+1) \left( b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(5)} \right) + b_{p-2-j}^{(11)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + h\tau k \left( b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(5)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( h \left( \Omega^2 b_{p-2-j}^{(6)} - k^2 b_{p-2-j}^{(4)} - (2k^2 + \tau^2 - j) b_{p-2-j}^{(5)} \right) + 2j b_{p-2-j}^{(11)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
 & \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \left( j \left( h k \left( b_{p-1-j}^{(4)} + b_{p-1-j}^{(5)} \right) d_j^{(r,q)} + \left( h b_{p-1-j}^{(5)} + b_{p-1-j}^{(11)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) \right) \\
 & \quad (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 6}).
 \end{aligned}$$

Для численной модели неоднородности вида (15-А), (16), (19-А), (20-А) либо (15-Б), (16), (19-Б), (20-Б), с учетом формально дополняющих разложения (23) определений  $d_{-2}^{(s,q)} = d_{-1}^{(s,q)} = 0$  ( $s = r, \theta, z; q = \overline{1, 6}$ ), рекуррентные соотношения соответственно записываются так:

$$\begin{aligned}
 d_p^{(r,q)} = & -\frac{1}{p(p-1)} \left( h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(r,q)} + h^2(p-1)(p-3) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \quad (28-А) \\
 & + h\tau(p-1) d_{p-1}^{(\theta,q)} + h^2\tau(p-3) d_{p-2}^{(\theta,q)} - \\
 & - hk(p-1) d_{p-1}^{(z,q)} - 2kh^2(p-2) d_{p-2}^{(z,q)} - kh^3(p-3) d_{p-3}^{(z,q)} + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-4} \left( h^4 \left( \Omega^2 a_{p-4-j}^{(2)} - k^2 a_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} + 2kh^3 g_{p-4-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-3} \left( -h^2 \left( -2 \left( h \left( \Omega^2 a_{p-3-j}^{(2)} - k^2 a_{p-3-j}^{(1)} \right) - g_{p-3-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2\tau g_{p-3-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} + k \left( h(j-2p+6) a_{p-3-j}^{(1)} - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - h(j-p+3) a_{p-3-j}^{(3)} - 4g_{p-3-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \Big) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-2} \left( -h \left( - \left( h \left( \Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} - (k^2 + \tau^2 + 2p - 2j - 4) a_{p-2-j}^{(1)} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + (j+1)(p-j-2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) - 2g_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\
 & \quad \left. - \tau \left( h \left( (j-2p+3) a_{p-2-j}^{(1)} - (j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) - 2g_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \\
 & \left. \left. + 2k \left( h \left( (j-2p+4) a_{p-2-j}^{(1)} - (j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) - g_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{p-1} \left( - \left( j(j-p) a_{p-j}^{(3)} + h(-p+j+1) \left( (2j+1) a_{p-1-j}^{(3)} - 2a_{p-1-j}^{(1)} \right) \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\
& \quad + h\tau \left( (j-2p+2) a_{p-1-j}^{(1)} - (j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} - \\
& \quad \left. - hk \left( (j-2p+2) a_{p-1-j}^{(1)} - (j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right), \\
d_p^{(\theta,q)} & = -\frac{1}{p(p-1)} \left( h\tau(p-1) d_{p-1}^{(r,q)} + h^2\tau(p-3) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \\
& \quad + h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(\theta,q)} - h^2(k^2-p^2+4p-3) d_{p-2}^{(\theta,q)} - \\
& \quad - 2h^3k^2 d_{p-3}^{(\theta,q)} - h^4k^2 d_{p-4}^{(\theta,q)} - h^2k\tau d_{p-2}^{(z,q)} - h^3k\tau d_{p-3}^{(z,q)} + \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left( h^4\Omega^2 b_{p-4-j}^{(2)} d_j^{(\theta,q)} \right) + \right. \\
& \quad + \sum_{j=0}^{p-3} \left( h^2 \left( -\tau b_{p-3-j}^{(3)} d_j^{(r,q)} + \left( 2h\Omega^2 b_{p-3-j}^{(2)} + (j-1) b_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + hk\tau b_{p-3-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
& \quad + \sum_{j=0}^{p-2} \left( -h \left( -\tau \left( h(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} - h(j+1) b_{p-2-j}^{(1)} - b_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& \quad - \left( h\Omega^2 b_{p-2-j}^{(2)} - h\tau^2 b_{p-2-j}^{(1)} + (2j-1) b_{p-2-j}^{(3)} - \right. \\
& \quad \left. \left. - h(j-1)(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} - hk\tau b_{p-2-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) + \\
& \quad + \sum_{j=0}^{p-1} \left( h\tau \left( (j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} - j b_{p-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\
& \quad \left. - \left( j(j-p) a_{p-j}^{(3)} - j b_{p-1-j}^{(3)} + h(2j-1)(j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} \right), \\
d_p^{(z,q)} & = -\frac{1}{p(p-1)} \left( -hk(p-1) d_{p-1}^{(r,q)} - h^2k(2p-3) d_{p-2}^{(r,q)} - h^3k(p-2) d_{p-3}^{(r,q)} - \right. \\
& \quad - h^2\tau k d_{p-2}^{(\theta,q)} - h^3\tau k d_{p-3}^{(\theta,q)} + \\
& \quad + h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(z,q)} + h^2 \left( (p-2)^2 - \tau^2 \right) d_{p-2}^{(z,q)} + \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left( kh^3 b_{p-4-j}^{(3)} d_j^{(r,q)} + h^4 \left( \Omega^2 b_{p-4-j}^{(2)} - k^2 b_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=0}^{p-3} \left( -h^2 \left( k \left( h(j-p+3) a_{p-3-j}^{(3)} - h(j+1) b_{p-3-j}^{(1)} - 2b_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - hk\tau b_{p-3-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} - \left( 2h \left( \Omega^2 b_{p-3-j}^{(2)} - k^2 b_{p-3-j}^{(1)} \right) + j b_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-2} \left( -h \left( k \left( 2h(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} - h(2j+1) b_{p-2-j}^{(1)} - b_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - hk\tau b_{p-2-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} - \left( -hj(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + h \left( \Omega^2 b_{p-2-j}^{(2)} - k^2 b_{p-2-j}^{(1)} \right) + 2j b_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
 & \quad + \sum_{j=0}^{p-1} \left( -kh \left( (j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} - j b_{p-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\
 & \quad \left. - j \left( (j-p) a_{p-j}^{(3)} + 2h(j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} - b_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \\
 & \quad (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 6}); \\
 d_p^{(r,q)} & = -\frac{1}{p(p-1)} \left( 2h(p-1)(p-2) d_{p-1}^{(r,q)} + h^2(p-2)(p-3) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \quad (28-Б) \\
 & + \sum_{j=0}^{p-4} \left( h^3 \left( h \left( \Omega^2 b_{p-4-j}^{(3)} - k^2 b_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} - k \left( b_{p-4-j}^{(4)} + b_{p-4-j}^{(6)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
 & \quad + \sum_{j=0}^{p-3} \left( -h^2 \left( - \left( 2h \left( \Omega^2 b_{p-3-j}^{(3)} - k^2 b_{p-3-j}^{(1)} \right) + \right. \right. \right. \\
 & + 2j b_{p-3-j}^{(5)} + (j+1) \left( b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(6)} \right) \left. \right) d_j^{(r,q)} - \tau \left( b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(6)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \\
 & \quad \left. + k \left( hj \left( b_{p-3-j}^{(1)} + b_{p-3-j}^{(2)} \right) + 2 \left( b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(6)} \right) \right) d_j^{(z,q)} \right) + \\
 & \quad + \sum_{j=0}^{p-2} \left( -h \left( - \left( h \left( \Omega^2 b_{p-2-j}^{(3)} - (k^2 + \tau^2 - 2j + 2) b_{p-2-j}^{(1)} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + (j-1) b_{p-2-j}^{(2)} \right) + (2j+1) \left( b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(6)} \right) + 4j b_{p-2-j}^{(5)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\
 & \quad \left. - \tau \left( h \left( (j-3) b_{p-2-j}^{(1)} + (j-1) b_{p-2-j}^{(2)} \right) + b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(6)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \\
 & \quad \left. + k \left( 2hj \left( b_{p-2-j}^{(1)} + b_{p-2-j}^{(2)} \right) + b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(6)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \\
 & \quad + \sum_{j=0}^{p-1} \left( j \left( h \left( 2b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) + b_{p-1-j}^{(4)} + 2b_{p-1-j}^{(5)} + b_{p-1-j}^{(6)} \right) d_j^{(r,q)} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h\tau \left( b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(\theta,q)} - hk \left( b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(z,q)} \Big) \Big), \\
& d_p^{(\theta,q)} = -\frac{1}{p(p-1)} \left( -h\tau(p-1) d_{p-1}^{(r,q)} - h^2\tau(p+1) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \\
& +h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(\theta,q)} - h^2(k^2 + 2\tau^2 - p^2 + 4p - 3) d_{p-2}^{(\theta,q)} - \\
& \left. -2h^3k^2 d_{p-3}^{(\theta,q)} - h^4k^2 d_{p-4}^{(\theta,q)} + h^2k\tau d_{p-2}^{(z,q)} + h^3k\tau d_{p-3}^{(z,q)} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left( h^4\Omega^2 a_{p-4-j}^{(2)} d_j^{(\theta,q)} \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left( h^3 \left( 2\Omega^2 a_{p-3-j}^{(2)} d_j^{(\theta,q)} + \tau k a_{p-3-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-2} \left( -h^2 \left( \tau \left( (j+1) a_{p-2-j}^{(1)} - (j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( \Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} - \tau^2 a_{p-2-j}^{(1)} - (j-1)(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - k\tau a_{p-2-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \left( -h\tau \left( j a_{p-1-j}^{(1)} - (j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( j(j-p) a_{p-j}^{(3)} + h(2j-1)(j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} \right) \right) \Big), \\
& d_p^{(z,q)} = -\frac{1}{p(p-1)} \left( hk(p-1) d_{p-1}^{(r,q)} + h^2k(2p-3) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \\
& \left. + h^3k(p-2) d_{p-3}^{(r,q)} + \right. \\
& \left. + h^2\tau k d_{p-2}^{(\theta,q)} + h^3\tau k d_{p-3}^{(\theta,q)} + h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(z,q)} - \right. \\
& \left. - h^2 \left( \tau^2 + 2k^2 - (p-2)^2 \right) d_{p-2}^{(z,q)} - 4h^3k^2 d_{p-3}^{(z,q)} - 2h^4k^2 d_{p-3}^{(z,q)} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left( h^4 \left( \Omega^2 a_{p-4-j}^{(2)} - k^2 a_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left( h^3 \left( k \left( (j+1) a_{p-3-j}^{(1)} - (j-p+3) a_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + k\tau a_{p-3-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} + 2 \left( \Omega^2 a_{p-3-j}^{(2)} - k^2 a_{p-3-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=0}^{p-2} \left( -h^2 \left( -k \left( (2j+1) a_{p-2-j}^{(1)} - 2(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - k\tau a_{p-2-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( \Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} - k^2 a_{p-2-j}^{(1)} - j(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
 & \quad + \sum_{j=0}^{p-1} \left( kh \left( j a_{p-1-j}^{(1)} - (j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\
 & \quad \left. - j \left( (j-p) a_{p-j}^{(3)} + 2h(j-p+2) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \Big) \\
 & \qquad \qquad \qquad (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 6}).
 \end{aligned}$$

На основе набора векторных частных решений (22) можно определить иско-  
мое базисное матричное решение уравнения (21) размерности  $3 \times 6$  в следующем  
виде

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(\xi) = [\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 1)}(\xi) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 6)}(\xi)]. \quad (29)$$

**4. Общее решение.** С использованием базисного решения (29) можно опре-  
делить общее решение уравнения (11) так:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{general})}(x) = \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(x) \mathbf{A}, \quad (30)$$

где  $\mathbf{A}$  – произвольный вектор-столбец размерности 6. Аналогично соотношению  
(30) можно записать представление для вектора  $\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(x)$  в виде

$$\tilde{\Sigma}^{(\tau, \text{general})}(x) = \hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) \mathbf{A}. \quad (31)$$

Здесь

$$\hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(\xi) = \hat{\mathbf{G}}(\xi) \left( \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(\xi) \right),$$

где  $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$  и  $\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi)$  – аналитические продолжения на плоскость комплексной пе-  
ременной  $\xi$  соответственно матрицы упругих модулей Гука  $\tilde{\mathbf{G}}(x)$  и матричного  
дифференциального оператора  $\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x)$ . В случае аналитической модели неод-  
нородности (14), (17), (18) отличные от нуля элементы матрицы  $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$  имеют  
вид:

$$\begin{aligned}
 \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= \psi_1(\xi) \quad (n, m = 1, 2; \quad 2, 1; \quad 1, 3; \quad 3, 1; \quad 2, 3; \quad 3, 2), \\
 \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= \psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi) \quad (j = \overline{1, 3}), \\
 \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= \psi_2(\xi) \quad (j = \overline{4, 6}).
 \end{aligned} \quad (32)$$

Для численной модели неоднородности вида (15-А), (16) (19-А), (20-А) либо (15-Б), (16) (19-Б), (20-Б) отличные от нуля элементы матрицы  $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$  соответственно определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= (1 - 2\psi_1(\xi)) \exp(\psi_3(\xi)) \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= \exp(\psi_3(\xi)) \quad (j = \overline{1, 3}), \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= \psi_1(\xi) \exp(\psi_3(\xi)) \quad (j = \overline{4, 6}); \end{aligned} \quad (33-А)$$

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= \psi_1(\xi) \exp(\psi_3(\xi)) \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= (2 + \psi_1(\xi)) \exp(\psi_3(\xi)) \quad (j = \overline{1, 3}), \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= \exp(\psi_3(\xi)) \quad (j = \overline{4, 6}). \end{aligned} \quad (33-Б)$$

**5. Дисперсионные соотношения.** На основании граничных условий (12), (13) с учетом представлений (30), (31) получаются дисперсионные уравнения относительно безразмерного продольного волнового числа  $k$  и приведенной частоты  $\Omega$  соответственно вида:

$$\Phi_{\Sigma}^{(\tau)}(k, \Omega) = \det \left( \begin{bmatrix} \left[ \hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(-1) \right]_{[1,5,6],[1..6]} \\ \left[ \hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(1) \right]_{[1,5,6],[1..6]} \end{bmatrix} \right) = 0; \quad (34)$$

$$\Phi_U^{(\tau)}(k, \Omega) = \det \left( \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(-1) \\ \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(1) \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (35)$$

**6. Численный эксперимент.** Исследование дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей бегущих изгибных волн ( $\tau = 1$ ) в свободном протяженном полумесяце цилиндра ( $h = 0.3$ ) проводилось для однородного материала

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)} \quad (36)$$

и различных случаев функционально неоднородного материала. Вид функциональных законов неоднородности определялся задачей изучить влияние фактора неоднородности по каждой физико-механической характеристике изотропного материала на свойства волнового процесса. Функциональные законы были заданы следующим образом:

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)} (1 + 0, 2x^3), \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (37-А)$$

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)} (1 + 0, 2x^3), \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (37-Б)$$

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)} (1 + 0, 2x^3). \quad (37-В)$$

В приведенных соотношениях использовались физико-механические характеристики алюминия

$$\tilde{\lambda}^{(Al)} = 5,91; \quad \tilde{\mu}^{(Al)} = 2,61; \quad \tilde{\rho}^{(Al)} = 2,7;$$

$$C_* = 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad \rho_* = 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Ниже волновод, задаваемый характеристиками (36), называется однородным, а характеристиками (37-А) – (37-В) – соответственно неоднородным волноводом А, Б или В типа.

Для неоднородных волноводов А–В типов в работе [4] применительно к случаю волн продольно-сдвигового типа подробно исследованы достаточные условия несильной радиальной неоднородности и погрешность аппроксимации. В представленных ниже результатах численного эксперимента использованы сформулированные в указанной работе рекомендации по оптимальному выбору типа и вида модели неоднородности: (14), (15-А), (15-В).

Численный эксперимент проводился в области изменения параметров  $k \in [0, 30]$  и  $\Omega \in [0, 30]$  для однородного волновода и неоднородных волноводов А–В типов. Построенные фрагменты спектров представлены на рисунках 1–3.

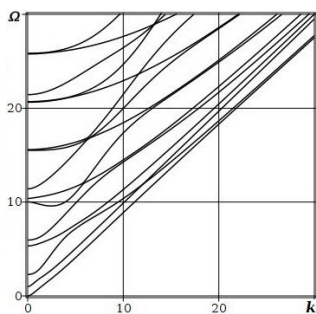


Рис. 1. Спектр однородного волновода

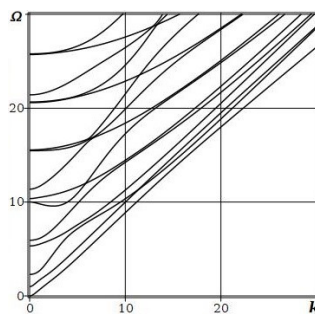


Рис. 2. Спектр неоднородного волновода Б типа

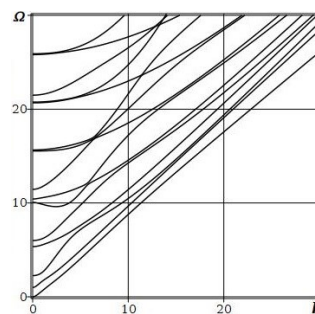


Рис. 3. Спектр неоднородного волновода В типа

Прежде всего следует отметить, что неоднородность только по упругому модулю  $\tilde{\lambda}(x)$  визуально не сказывается на дисперсионной картине при сопоставлении со спектром однородного волновода (рис. 1), и по этой причине указанный спектр не приводится. При этом неоднородность по двум другим характеристикам материала  $\tilde{\mu}(x)$  (рис. 2) и  $\tilde{\rho}(x)$  (рис. 3) приводит к качественному изменению спектральной картины для младших мод. Это, в частности, проявляется в зонах асимптотической локализации первой моды по отношению к старшим модам спектра в коротковолновой высокочастотной области спектра. Количественный сопоставительный анализ поведения пяти младших мод фрагментов спектров однородного и неоднородного волновода А–В типов проведен с использованием функции сравнения парных по номеру в соответствующих спектрах мод

$$\Delta\Omega(k) = \left( \Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right), \quad (38)$$

и представлен на рисунках 4–6. Порядковые номера сопоставляемых мод указаны в нижней части рисунков. Отмеченный выше качественный вывод о слабом

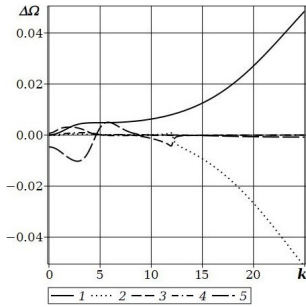


Рис. 4. Сопоставление парных мод спектров неоднородного А типа и однородного волноводов

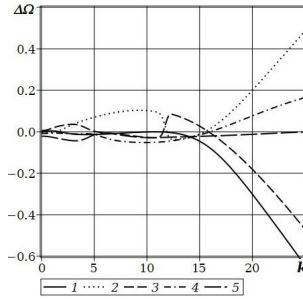


Рис. 5. Сопоставление парных мод спектров неоднородного В типа и однородного волноводов

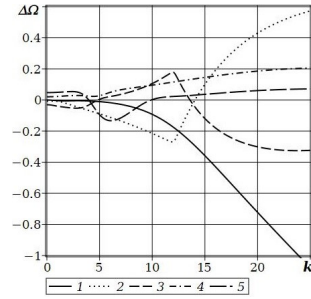


Рис. 6. Сопоставление парных мод спектров неоднородного В типа и однородного волноводов

влиянии неоднородности только по упругому модулю  $\tilde{\lambda}(x)$  имеет на представленных рисунках количественную оценку – значения функции  $\Delta\Omega(k)$  при сопоставлении спектров однородного и неоднородного по модулю  $\tilde{\lambda}(x)$  волновода (рис. 4) в абсолютных значениях оказались на порядок меньшими, чем значения указанной функции при сопоставлении однородного и неоднородных только по модулю  $\tilde{\mu}(x)$  (рис. 5) и плотности  $\tilde{\rho}(x)$  (рис. 6) волноводов. Эта закономерность отмечена также в работе [4] при исследовании спектров для случая осесимметричных волн продольно-сдвигового типа. Для неоднородного только по модулю  $\tilde{\lambda}(x)$  волновода (рис. 4) следует указать на тенденцию смещения в коротковолновой высокочастотной области первой моды в область более высоких частот, а второй моды – в область более низких частот. Указанная тенденция для неоднородных только по модулю  $\tilde{\mu}(x)$  (рис. 5) и плотности  $\tilde{\rho}(x)$  (рис. 6) волноводов наблюдается с точностью до наоборот.

Исследованию подлежали также фазовые и групповые скорости волн для представленных на рисунках 1–3 фрагментов спектров. На рисунках 7–9 и 10–12 представлены соответственно графики нормированных величиной  $c_* = \sqrt{C_*/\rho_*}$  фазовых и для пяти младших мод групповых скоростей.

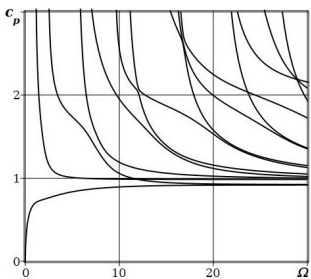


Рис. 7. Фазовые скорости волн в однородном волноводе

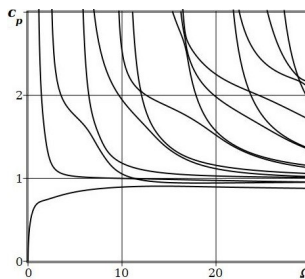


Рис. 8. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе В типа

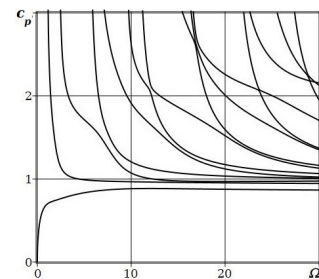


Рис. 9. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе В типа

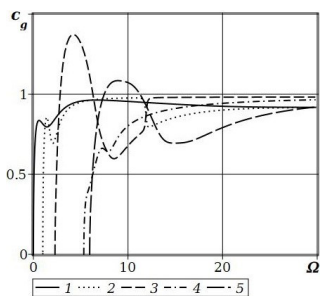


Рис. 10. Групповые скорости волн в однородном волноводе

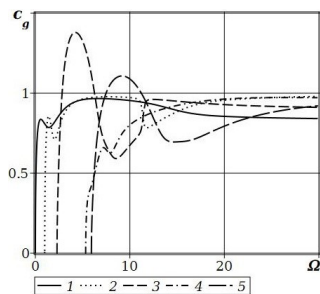


Рис. 11. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе Б типа

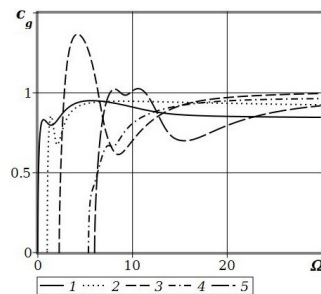


Рис. 12. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе В типа

Представленные на рисунках 7–12 графики иллюстрируют ранее отмеченные тенденции характерной локализации асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области двух низших мод по отношению к старшим модам спектра.

**Заключение.** Результатами представленных в статье исследований являются построенные на основе апробированной в случае осесимметричных волн продольно-сдвигового типа модели функциональной многофакторной радиальной неоднородности изотропного материала полого цилиндрического волновода аналитические базисные частные решения для случая неосесимметричных волновых процессов, а также полученные в процессе проведения численного эксперимента выводы о влиянии характера неоднородности на топологию дисперсионных спектров, фазовые и групповые скорости бегущих нормальных волн указанного типа.

Исследования проводились в ФГБОУВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Моисеенко И.А. Волны деформаций в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого сечения / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 1 (66). – С. 31–53.
2. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 134–146.
3. Моисеенко И.А. Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко, С.А. Прийменко, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 27–41.
4. Дзундза А.И. Осесимметричные нормальные волны в протяженных полых цилиндрах с многофакторной функциональной радиальной неоднородностью изотропного материала / А.И. Дзундза, В.А. Моисеенко, И.А. Моисеенко, Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2025. – № 3 (92). – С. 103–120.
5. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре / Н.А. Шульга // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 9. – С. 14–18.
6. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: НТИУ. – 1939. – 719 с.

**A.I. Dzundza, N.I. Melnichuk, I.A. Moiseyenko, R.N. Neskorohev**

**Study of non-axisymmetric normal waves in hollow cylinders with multifactorial functional radial inhomogeneity of an isotropic material.**

The article considers the problem of constructing a basis set of analytical partial solutions of a mathematical model describing the propagation of non-axisymmetric elastic normal waves in functionally-gradient hollow isotropic cylinders of annular cross-section. The properties of such waves are studied in terms of the influence of the type of functional inhomogeneity of the waveguide material on the topology of dispersion spectra, phase and group velocities of traveling waves.

**Keywords:** *functional-gradient material, multifactorial inhomogeneity, hollow cylindrical waveguide, isotropy, normal waves, analytical basis partial solutions, dispersion spectrum, phase velocity, group velocity.*

*Статья поступила в редакцию 02.12.2025;  
доработана 18.12.2025;  
рекомендована к печати 24.12.2025.*