

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-60-71

EDN:TCZKRG

©2025. С.А. Калоеров¹, О.Э. Ермаков², Л.П. Вовк³

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ТОНКОЙ ПЬЕЗОПЛИТЫ

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба электроупругих тонких плит решена задача об изгибе пьезоплиты с эллиптическими включениями из других материалов. При этом функции, голоморфные вне отверстий, представлены рядами Лорана; функции, голоморфные во включениях, – рядами по полиномам Фабера. При удовлетворении граничным условиям на контурах контактов плиты и включений обобщенным методом наименьших квадратов определение неизвестных коэффициентов рядов сведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для плиты с двумя круговыми или линейными включениями. Исследованы закономерности влияния физико-механических свойств материалов и геометрических характеристик включений на значения изгибающих моментов и коэффициентов интенсивности моментов для концов линейных включений.

Ключевые слова: пьезоплита, пьезовключения, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, изгибающие моменты.

Введение. Элементы различных конструкций современной техники изготавливаются из пьезоматериалов [1–7]. Часто такие элементы, представляющие собой изгибаемые тонкие плиты, имеют отверстия, трещины и инородные включения. При этом вблизи контуров этих отверстий, трещин и включений возникают высокие концентрации изгибающих механических и индукционных мо-

¹Калоеров Стефан Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Ермаков Олег Эдуардович – асп. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: ermakov.donetsk@mail.ru.

Ermakov Oleg Eduardovich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³Вовк Леонид Петрович – докт. техн. наук, проф. каф. математического моделирования ф-та транспорт. и информ. технологий АДИ ДонНТУ Горловка, e-mail: leonidvovk166@gmail.com

Vovk Leonid Petrovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Automobile and Highway Institute, Gorlovka, Faculty of Transport and Information Technology, Chair of Mathematical Modeling.

ментов, что может приводить к разрушению этих элементов и подлежит учету при проектировании соответствующих конструкций. Соответственно, для этого нужно иметь надежные методы определения электроупругого состояния (ЭУС) многосвязных тонких кусочно-однородных плит.

Как показывают исследования, наиболее достоверные результаты по определению ЭУС многосвязных плит в рамках прикладной модели электроупругого изгиба получаются при решении задач с использованием комплексных потенциалов электроупругости [8].

В данной работе с использованием потенциалов обобщенных комплексных переменных построено общее решение задачи об изгибе бесконечной пьезоплиты с произвольными включениями. При этом комплексные потенциалы для бесконечной плиты представлены рядами Лорана, для включений – рядами по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, определяемыми из граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [9]. Для плиты с двумя круговыми или линейными включениями проведены широкомасштабные численные исследования распределений изгибающих моментов и изменения коэффициентов интенсивности моментов (КИМ). Установлен ряд закономерностей влияния на ЭУС плит геометрических характеристик включений, их места расположения, физико-механических свойств материалов плиты и включений.

1. Постановка и метод решения задачи. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy электроупругую тонкую плиту, ослабленную эллиптическими отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) и полуосями a_l , b_l (рис. 1), в которые вложены включения из других пьезоматериалов, находящиеся с плитой в условиях идеального электроупругого контакта. Каждое из включений может переходить в линейное (например, при $b_l = 0$). Обозначим бесконечную многосвязную область, ограниченную контурами L_l , через S ; области включений – через S_l . Введем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l так, что в этих системах и в основной системе координат уравнения эллипсов имеют вид

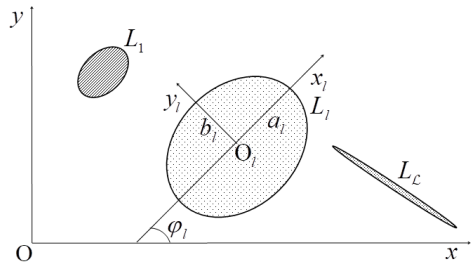


Рис. 1. Многосвязная плита с включениями

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta; \quad (1)$$

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (2)$$

где φ_l – угол между положительными направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки; x_{0l} , y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; θ – параметр, изменяющийся в интервале от 0 до 2π . На бесконечности плита находится

под действием механических изгибающих моментов M_x^∞ , M_y^∞ , H_{xy}^∞ и моментов индукций M_{dx}^∞ , M_{dy}^∞ или напряженностей H_{dx}^∞ , H_{dy}^∞ .

Если для решения задачи об определении электроупругого состояния рассматриваемой пьезоплиты использовать комплексные потенциалы теории изгиба тонких электроупругих плит [8], то оно сводится к нахождению из соответствующих граничных условий комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) для бесконечной плиты и комплексных потенциалов $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ ($k = \overline{1, 3}$) для каждого включения.

Комплексные потенциалы $W'_k(z_k)$ являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где μ_k - корни характеристического уравнения

$$l_{4s}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}^2(\mu) = 0; \quad (4)$$

$l_{ij}(\mu)$ - полиномы вида

$$l_{4s}(\mu) = -(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}),$$

$$l_{3g}(\mu) = C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11};$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ - упругие жесткости плиты; $C_{gij} = c_{gij}D_0$, $C_{\beta ij} = c_{\beta ij}D_0$ - электрические жесткости плиты; $D_0 = \frac{2}{3}h^3$; h - полутолщина плиты; b_{ij} , c_{gij} , $c_{\beta ij}$ - элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}^{-1};$$

s_{ij} - коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического поля; g_{ij} - пьезоэлектрические модули деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ij} - коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях [8].

Комплексные потенциалы $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ ($k = \overline{1, 3}$) для каждого включения $S^{(l)}$ являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y, \quad (5)$$

где $\mu_k^{(l)}$ - корни характеристического уравнения, получаемого из уравнения (4) заменой всех величин на аналогичные величины с индексом (l) вверху.

Функции $W'_k(z_k)$ определены в областях S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями (3) и ограниченными контурами L_{kl} , соответствующими контурам L_l при этих преобразованиях, и в общем случае многосвязной плиты они могут быть представлены в виде [8, 9]

$$W'_k(z_k) = a_{00} + \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (6)$$

где Γ_k – известные постоянные, определяемые по значениям моментов на бесконечности [8]; ζ_{kl} – переменные, получаемые из конформных отображений внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} [10]

$$z_k = z_{kl0} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \quad (7)$$

$$z_{kl0} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}; \quad (8)$$

a_{kln} – неизвестные коэффициенты рядов, которые определим из граничных условий на контурах контакта плиты с включениями.

Функции $W'_k(z_k)$ голоморфны в конечных областях $S_k^{(l)}$, получаемых из областей $S^{(l)}$ аффинными преобразованиями (5), и они могут быть представлены рядами по полиномам Фабера для этих областей

$$W'_k(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} P_{kn}^{(l)}(z_k), \quad (9)$$

где $P_{kn}^{(l)}(z_k)$ – полиномы Фабера для эллипса $L_k^{(l)}$, имеющие вид [11]

$$P_{k0}^{(l)} = 1, \quad P_{kn}^{(l)} = \left(\zeta_k^{(l)} \right)^n + \frac{\left(m_k^{(l)} \right)^n}{\left(\zeta_k^{(l)} \right)^n};$$

$\zeta_k^{(l)}$ – переменные, вводимые при конформных отображениях внешности единичных кругов $|\zeta_k^{(l)}| \geq 1$ на внешности контуров $L_k^{(l)}$ на базе использования формул

$$z_k^{(l)} = z_{k0}^{(l)} + R_k^{(l)} \left(\zeta_k^{(l)} + \frac{m_k^{(l)}}{\zeta_k^{(l)}} \right); \quad (10)$$

$$z_{k0}^{(l)} = x_{0l} + \mu_k^{(l)} y_{0l},$$

$$R_k^{(l)} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k^{(l)} \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_k^{(l)} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k^{(l)} \cos \varphi_l)}{2R_k^{(l)}};$$

$\mu_k^{(l)}$ – корни уравнения (4) для включения $S^{(l)}$.

Поскольку полиномы Фабера $P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)})$ можно представить рядами по степеням $z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)}$ [11], то и функции $W_k'^{(l)}(z_k^{(l)})$ можно представить и в виде степенных рядов

$$W_k'^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^n, \quad (11)$$

где $a_{kn}^{(l)}$ – неизвестные постоянные, которые, как и a_{kln} , будем определять из граничных условий на контурах контактов плиты S и включений $S^{(l)}$.

На контурах включений, где имеет место идеальный контакт плиты с включениями, граничные условия для определения комплексных потенциалов имеют вид [8]

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \left(g_{ikl} W_k'(z_k) - g_{ik}^{(l)} W_k'^{(l)}(z_k^{(l)}) \right) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (12)$$

где

$$g_{1kl} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{2kl} = q_k, \quad g_{3kl} = 1, \quad (13)$$

$$g_{4kl} = \mu_k, \quad g_{5kl} = d_{yk}, \quad g_{6kl} = \nu_k;$$

$$g_{1k}^{(l)} = \frac{p_k^{(l)}}{\mu_k^{(l)}}, \quad g_{2k}^{(l)} = q_k^{(l)}, \quad g_{3k}^{(l)} = 1,$$

$$g_{4k}^{(l)} = \mu_k^{(l)}, \quad g_{5k}^{(l)} = d_{yk}^{(l)}, \quad g_{6k}^{(l)} = \nu_k^{(l)},$$

$$f_{1l} = -c_l x + c_{1l}, \quad f_{2l} = c_l y + c_{2l}, \quad (14)$$

$$f_{3l} = f_{4l} = 0, \quad f_{jl} = c_{jl}, \quad j = 5, 6;$$

p_k, q_k, d_{yk}, ν_k – известные постоянные [8]; c_l – вещественные постоянные, причем, все величины со значком (l) вверху относятся к включению $S^{(l)}$ и получаются по приведенным выше формулам для плиты заменой соответствующих величин без значка на величины со значком (l) .

Для многосвязных областей граничным условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивные постоянные, входящие в обычные граничные условия. Последние условия, полученные из условий (12) их дифференцированием по дуге контура, имеют вид

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \left[g_{ikl} \delta_{k,s} W_k''(z_k) - g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} W_k''^{(l)}(z_k^{(l)}) \right] = \frac{df_{il}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (15)$$

где

$$W_k''(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_{kln}(z_k) a_{kln}, \quad W_k''^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_{kn}{}^{(l)}(z_k^{(l)}) a_{kn}^{(l)}; \quad (16)$$

$$\delta_{k,s} = \frac{dz_k}{ds}, \quad \delta_{k,s}^{(l)} = \frac{dz_k^{(l)}}{ds},$$

$$\phi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \quad \phi'_{kn}{}^{(l)}(z_k^{(l)}) = n(z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^{n-1} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}).$$

Граничным условиям (15) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [9, 12, 13]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($p = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (16) в граничные условия (15) в точках $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$, для определения неизвестных постоянных a_{kln} и $a_{kn}^{(l)}$ получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} 2\text{Re} \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \phi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} \phi'_{kn}{}^{(l)}(t_{km}^{(p)}) a_{kn}^{(l)} \right] = \\ = \frac{df_{ip}(t_{pm})}{ds} - 2\text{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 6}; p = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}). \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме уравнений (17), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^3 i a_{kp1} = 0 \quad (p = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (18)$$

следующие из требования однозначности прогиба при полном обходе каждого из контуров L_p .

Систему (17), дополненную уравнениями (18), будем решать методом сингулярных разложений [14, 15]. После нахождения псевдорешений этой системы функции $W_k'(z_k)$ и $W_k'^{(l)}(z_k^{(l)})$ будут известны, и по ним можно вычислять основные характеристики ЭУС (механические изгибающие и крутящий моменты, моменты индукций электрического поля, перерезывающие силы) [8]. Если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейное включение, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) k_{1M}^{\pm} и k_{2M}^{\pm} по известным формулам

$$k_{1M}^{\pm} = 2\text{Re} \left[p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - 2r_k \cos \varphi_l \sin \varphi_l \right] M_k,$$

$$k_{2M}^{\pm} = 2\text{Re} \left[(q_k - p_k) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + r_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_k,$$

в которых

$$M_k = \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln},$$

причем «+» и «-» у КИМ в локальной системе координат $O_l x_l y_l$ относятся к правому и левому концам трещины соответственно.

Как частный случай из приведенного решения задачи электроупругости (ЭУ) следует решение задачи теории упругости (ТУ). При проведении численных исследований результаты для этой задачи можно получить по общей программе решения задачи ЭУ, проводя вычисления для модельного материала с постоянными $g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}$, $\nu'_{ij} = \lambda_g \nu_{ij}$ и полагая $\lambda_g = 1$ для задачи ЭУ, $\lambda_g \leq 10^{-3}$ для задачи ТУ.

2. Описание результатов численных исследований. Были проведены численные исследования для плит из материалов: 1) композит на основе $BaTiO_3 - CaFe_2O_4$ (материал М1) [16, 17]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$ (материал М2) [18]. При проведении расчетов упругие свойства материала каждого включения связывались со свойствами материала бесконечной плиты соотношениями $s_{ij}^{(l)} = \lambda_s^{(l)} s_{ij}$, где $\lambda_s^{(l)}$ – параметры пропорциональности характеристик соответствующих материалов в бесконечной плите (область S) и включениях (области $S^{(l)}$). Ввиду того, что на значения моментов в бесконечной плите пьезосвойства включений влияют незначительно, при проведении расчетов эти свойства включений не учитывались, т.е. считалось, что $\lambda_g^{(l)} = \lambda_p^{(l)} = \lambda_{gp}^{(l)} = 0$.

В таблице 1 для изгиба моментами $M_y^\infty = m_y$ бесконечной плиты из «существенно анизотропного» материала М2 и слабо пьезоактивного материала М1 с двумя одинаковыми круговыми упругими (не обладающими пьезосвойствами) включениями радиуса a_1 ($b_1 = a_1, b_2 = a_2 = a_1$) (рис. 2), с точностью до множителя m_y , в зависимости от c/a_1 , где c - расстояние между включениями, от параметра механической жесткости включений $\lambda_s^{(1)}$ и центрального угла θ контура L_1 , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, приведены значения изгибающих моментов M_s в точках контакта плиты с левым включением, на площадках, перпендикулярных к контуру. Значения $\lambda_s^{(1)}$, равные 0 и ∞ , относятся к случаям плиты с абсолютно жесткими включениями и абсолютно мягкими включениями (отверстиями). На рисунке 3 для некоторых значений c/a_1 изображены графики распределения этих моментов около контура L_1 в плите из материала М2. Сплошные линии относятся к случаю $c/a_1 = 0, 1$; штриховые – к случаю $c/a_1 = \infty$.

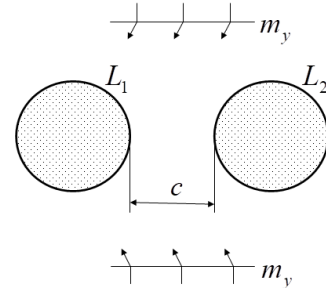


Рис. 2. Схема задачи с двумя круговыми включениями

Из таблицы 1, рисунка 3 и других полученных результатов следует, что влия-

Таблица 1. Значения M_s/t_y в плите около контура левого включения

c/a_1	$\lambda_s^{(1)}$	θ , рад.									
		0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	
		Задача ЭМУ					Задача ТУ				
		Материал М2									
∞	0,0	-0,852	-0,322	0,963	0,988	-0,852	-0,849	-0,218	0,679	1,027	
	0,1	-0,196	0,044	0,639	0,540	-0,196	-0,170	0,106	0,447	0,559	
	0,5	0,647	0,532	0,314	0,089	0,647	0,669	0,546	0,253	0,094	
	2,0	1,316	0,956	0,247	-0,005	1,315	1,280	0,945	0,302	-0,013	
	10,0	1,825	1,306	0,331	0,112	1,825	1,696	1,272	0,469	0,078	
	∞	2,063	1,474	0,394	0,199	2,063	1,876	1,424	0,565	0,146	
1,00	0,0	-0,629	-0,508	0,628	0,876	-0,830	-0,649	-0,382	0,439	0,907	
	0,1	-0,183	-0,083	0,476	0,484	-0,207	-0,185	-0,004	0,344	0,500	
	10,0	2,199	1,440	0,320	0,107	1,930	2,098	1,406	0,438	0,075	
	∞	2,610	1,662	0,371	0,189	2,208	2,454	1,617	0,519	0,138	
0,10	0,0	-1,630	-0,584	0,554	0,869	-0,894	-1,627	-0,449	0,386	0,899	
	0,1	-0,604	-0,191	0,409	0,465	-0,237	-0,575	-0,105	0,299	0,480	
	10,0	4,081	1,442	0,269	0,127	2,055	3,816	1,355	0,320	0,091	
	∞	6,714	1,499	0,254	0,204	2,410	6,146	1,386	0,281	0,148	
0,01	0,0	-5,557	-0,278	0,616	0,876	-0,937	-5,690	-0,224	0,435	0,907	
	0,1	-1,331	-0,128	0,415	0,462	-0,247	-1,267	-0,078	0,300	0,477	
	0,5	0,390	0,443	0,275	0,071	0,614	0,459	0,462	0,240	0,076	
	2,0	1,868	1,022	0,245	0,006	1,379	1,746	1,002	0,274	-0,002	
	10,0	6,106	1,253	0,236	0,132	2,088	5,453	1,192	0,279	0,096	
	∞	20,727	0,630	0,136	0,219	2,504	18,601	0,570	0,129	0,152	
		Материал М1									
∞	0	-0,774	-0,266	0,798	1,207	-0,774	-0,756	-0,262	0,783	1,207	
	0,1	-0,134	0,078	0,520	0,663	-0,134	-0,122	0,080	0,511	0,663	
	0,5	0,678	0,543	0,269	0,110	0,678	0,681	0,543	0,266	0,110	
	2	1,231	0,908	0,279	-0,010	1,231	1,268	0,942	0,298	-0,008	
	10	1,642	1,231	0,465	0,138	1,642	1,664	1,255	0,472	0,120	
	∞	1,826	1,384	0,579	0,247	1,826	1,835	1,399	0,577	0,215	
1,00	0,0	-0,623	-0,361	0,410	1,052	-0,730	-0,667	-0,459	0,478	1,056	
	0,1	-0,216	-0,066	0,354	0,584	-0,134	-0,195	-0,054	0,380	0,591	
	10,0	2,534	1,759	0,596	0,041	2,077	2,407	1,579	0,521	0,203	
	∞	2,534	1,759	0,596	0,041	2,077	2,407	1,579	0,521	0,203	
0,10	0	-0,425	-0,225	-0,181	1,050	-0,509	-0,194	-0,072	-0,250	0,587	
	0,1	-0,188	-0,011	0,047	0,573	-0,055	0,019	0,092	-0,130	0,492	
	10	6,332	1,403	0,173	0,012	2,254	6,018	1,332	0,313	0,218	
	∞	6,340	1,551	0,282	0,104	2,251	6,022	1,339	0,307	0,218	

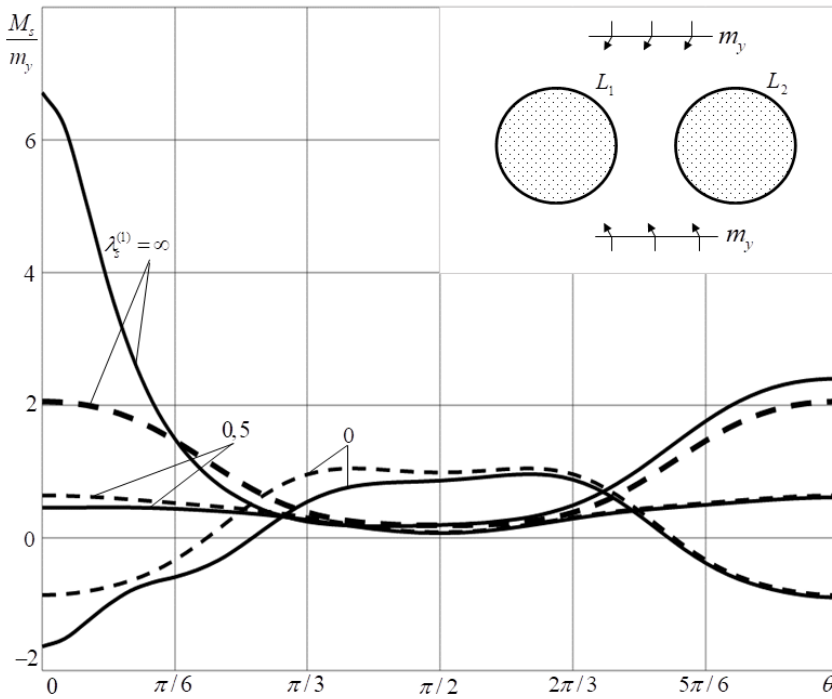


Рис. 3. Графики распределения моментов M_s около контура L_1 при $c/a_1 = 0,1$ (сплошные линии) и $c/a_1 = \infty$ (штриховые линии)

яние одного включения на ЭУС около другого значительно, если расстояние между включениями менее диаметров включений ($c/a_1 \leq 2$); с уменьшением этого расстояния между включениями значения моментов M_s в плите около контуров включений резко изменяются вблизи точек перемены и несколько меньше – в зонах противоположных перемены (возрастают при $\lambda_s^{(1)} > 1$ (при $E_1^{(1)} < E_1$) и уменьшаются при $\lambda_s^{(1)} < 1$ (при $E_1^{(1)} > E_1$)). При этом на значения моментов в этой зоне существенно влияет значение параметра жесткости $\lambda_s^{(1)}$: с увеличением значения $\lambda_s^{(1)}$ (с уменьшением жесткости включений) значения моментов M_s резко возрастают. Так, если $c/a_1 = 0,01$, то в точке контура, соответствующей $\theta = 0$, при изменении $\lambda_s^{(1)}$ от 0 (абсолютно жесткие включения) до ∞ (неподкрепленные отверстия) значения моментов растут от $-5,557$ до $20,727$. Вдали от перемены эти значения изменяются незначительно. Значения изгибающих моментов в плите из «существенно анизотропного» материала М2 значительно больше, чем в плите из «близкого к изотропному» материала М1. На изгибающие моменты в плите значительно влияют пьезосвойства; порой значения моментов с учетом пьезосвойств (задача ЭУ) в 2 и более раз отличаются от их значений без учета пьезосвойств (задача ТУ).

С уменьшением отношения полуосей эллиптических отверстий b_l/a_l значения

моментов M_s в окрестности концов малых полуосей эллипсов b_l значительно уменьшаются, но они резко растут в окрестности концов больших полуосей a_l , стремясь к бесконечности, и при $b_l/a_l \leq 10^{-3}$ можно говорить о КИМ для концов линейных включений.

В таблице 2 для плиты из материала М2 с двумя одинаковыми упругими линейными включениями (не обладающими пьезосвойствами) длины $2a_1$ ($2a_2 = 2a_1$) (рис. 4) в зависимости от c/a_1 , где c – расстояние между включениями, и параметра механической жесткости включений $\lambda_s^{(1)}$ даны значения КИМ k_1^\pm (в данном случае $k_2^\pm = 0$). Значения $\lambda_s^{(1)}$, равные 0 и ∞ , относятся к случаям абсолютно жестких включений и трещин соответственно. Для случаев, когда параметр $\lambda_s^{(1)}$ равен 0, 1 и 10, значения k_1^+ (КИН для правого конца трещины) для всех c/a_1 получаются такими же, как и k_1^- , поэтому они в таблице 2 не приведены.

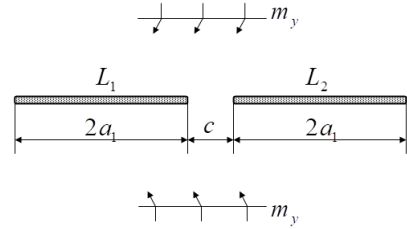


Рис. 4. Схема задачи с двумя линейными включениями

Таблица 2. Значения КИМ для концов левого линейного включения в плите из материала М2 с двумя линейными включениями

$\lambda_s^{(1)}$	КИМ	c/a_1					
		∞	2	1	0,5	0,1	0,01
0	k_1^-	-0,549	-0,564	-0,577	-0,593	-0,632	-0,672
	k_1^+	-0,549	-0,575	-0,611	-0,675	-0,985	-2,103
10^{-3}	k_1^-	-0,160	-0,161	-0,162	-0,163	-0,164	-0,165
	k_1^+	-0,160	-0,163	-0,166	-0,173	-0,207	-0,322
0,1	k_1^-	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003
10	k_1^-	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007
10^3	k_1^-	0,437	0,441	0,444	0,447	0,453	0,456
	k_1^+	0,437	0,446	0,459	0,484	0,602	1,003
∞	k_1^-	0,998	1,026	1,050	1,079	1,149	1,221
	k_1^+	0,998	1,046	1,110	1,226	1,791	3,838

Как видно из таблицы 2, если механическая жесткость включений меньше жесткости плиты ($\lambda_s^{(1)} > 1$), то КИМ положительны, и в малой окрестности концов линейных включений при положительных толщинных координатах z напряжения положительны (происходит растяжение); если же механическая жесткость включений меньше жесткости плиты ($\lambda_s^{(1)} < 1$), то КИМ отрицательны, и в малой окрестности концов включений при положительных толщинных координатах z напряжения в плите отрицательны (происходит сжатие). Если материалы плиты и включений по механическим свойствам одинаковы ($\lambda_s^{(1)} = 1$), то, как и следовало ожидать, КИМ равны нулю и напряженное состояние в плите такое же, как в плите без включения. При сближении друг с другом включений

из более жесткого материала, чем материал плиты ($\lambda_s^{(1)} < 1$) значения КИМ несколько уменьшаются; при сближении друг с другом включений из выражено мягкого материала, чем материал плиты ($\lambda_s^{(1)} \gg 1$), значения КИМ резко растут, особенно для ближайших друг к другу концов включений (трещин).

Заключение. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких пьезоплит [8] решена задача об изгибе плиты с включениями из других материалов. При решении задачи голоморфные вне областей включений функции после соответствующих конформных отображений разлагаются в ряды Лорана, функции, голоморфные в эллиптических областях, – в ряды по полиномам Фабера. Определение неизвестных коэффициентов рядов из граничных условий реализуется с применением обобщенного метода наименьших квадратов [9, 12, 13] и сведено к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений [14, 15]. Численные исследования проведены для плиты с двумя круговыми или линейными включениями. Установлены закономерности изменения электроупругого состояния плиты в зависимости от физико-механических свойств материалов плиты и включений, геометрических характеристик включений.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностран. лит., 1949. – 717 с.
3. Бичурин М.И. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин [и др.]. – М.: Изд-во «Академия Естественных наук», 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюл. Рос. магнит. о-ва. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Rahmoune M. New thin piezoelectric plate models / M. Rahmoune, A. Benjeddou, R. Ohayon // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1998. – Vol. 9. – P. 1017–1029.
6. Srinivas S. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites / S. Srinivas, Y.L. Jiang // Acta Mater. – 2005. – Vol. 53. – P. 4135–4142. – DOI: 10.1016/j.actamat.2005.05.014.
7. Vel S.S. Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators / S.S. Vel, R.C. Batra // Smart Mater. Struct. – 2001. – Vol. 10. – P. 240–251. – DOI: 10.1088/0964-1726/10/2/309.
8. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38. – EDN: EZZZBN.
9. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
10. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
11. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – Киев-Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
12. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. / В.В. Воеводин. – М.: Наука,

1977. – 304 с.
13. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Муллер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
 14. *Drmac Z.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
 15. *Drmac Z.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1343–1362. – DOI: 10.1137/05063920X.
 16. *Tian W.-Y.* Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.02.002.
 17. *Yamamoto Y.* Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
 18. *Hou P.F.* Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Materials. – 2009. – V. 41. – P. 329–338. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001.

S.A. Kaloerov, O.E. Ermakov, L.P. Vovk

Transverse bending of an electroelastic piecewise homogeneous thin piezoplate.

Using the complex potentials of the theory of bending of electroelastic thin plates, the problem of bending piezoplates with elliptical inclusions of other materials has been solved. In this case, functions that are holomorphic outside the holes are represented by Laurent series, and functions that are holomorphic in inclusions are represented by Faber polynomial series. By satisfying the boundary conditions on the contact contours of the plate and inclusions using the generalized least squares method, the determination of unknown coefficients of the series is reduced to an overridden system of linear algebraic equations solved by the singular value decomposition method. The results of numerical studies for a plate with two circular or linear inclusions are described. The patterns of the influence of the physico-mechanical properties of materials and geometric characteristics of inclusions on the values of bending moments and moment intensity coefficients for the ends of linear inclusions are investigated.

Keywords: *piezoplate, piezo inclusions, complex potentials, generalized least squares method, bending moments.*

*Статья поступила в редакцию 27.11.2025;
доработана 12.12.2025;
рекомендована к печати 24.12.2025.*