

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-35-47

EDN:WITKNG

©2025. С.А. Калоеров<sup>1</sup>, А.В. Сероштанов<sup>2</sup>, Л.П. Вовк<sup>3</sup>

## ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОПОЛОСЫ ПРИ ЕЕ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба электроупругих тонких плит решена задача об изгибе полосы с произвольными отверстиями и трещинами, в том числе пересекающимися друг с другом и пересекающих прямолинейные границы. При этом комплексные потенциалы представлены в виде рядов Лорана с неизвестными коэффициентами, определяемыми из граничных условий на контурах отверстий и прямолинейных границах обобщенным методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для полосы с центральным круговым отверстием, с центральным круговым отверстием и двумя симметричными краевыми трещинами из него, с двумя круговыми выемками на прямолинейных границах полосы. Исследованы закономерности изменения электроупругого состояния полосы в зависимости от геометрических характеристик отверстий и трещин, их взаиморасположения. Установлено, что с приближением прямолинейных границ полосы к отверстию или трещине значения изгибающих моментов в точках перемены резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах полосы. Большая концентрация моментов наблюдается и в точках прямолинейных границ полосы вблизи перемычек. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала, особенно в зонах высокой концентрации изгибающих моментов, поэтому в этих случаях нельзя ограничиваться решением задачи теории упругости об изгибе плиты, а нужно решать задачу электроупругости.

**Ключевые слова:** тонкая пьезоплита, полоса, отверстия, трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, коэффициенты интенсивности изгибающих моментов.

<sup>1</sup>Калоеров Стефан Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru.

*Kaloerov Stefan Alekseevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Сероштанов Александр Владимирович – асп. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: aleks.serosht@gmail.com

*Seroshtanov Aleksandr Vladimirovich* – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>3</sup>Вовк Леонид Петрович – докт. техн. наук, проф. каф. математического моделирования ф-та транспорт. и информ. технологий АДИ ДонНТУ Горловка, e-mail: leonidvovk166@gmail.com

*Vovk Leonid Petrovich* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Automobile and Highway Institute, Gorlovka, Faculty of Transport and Information Technology, Chair of Mathematical Modeling.

**Введение.** На протяжении длительного времени тонкие пластинки, изготовленные из пьезоматериалов, активно используются в качестве конструктивных элементов в различных областях науки и техники [1–4]. Наличие отверстий и трещин в таких пластинках приводит к тому, что при различных механических и электрических воздействиях вблизи этих отверстий и трещин могут возникать высокие концентрации напряжений и индукций, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Следовательно, нужно иметь надежные методы определения электроупругого состояния (ЭУС) пластин с различными отверстиями и трещинами.

Эти вопросы особенно актуальны для случая тонких пластин, эксплуатируемых в условиях их поперечного изгиба и называемых в этом случае тонкими плитами. К сожалению, до недавнего времени широкомасштабные исследования ЭУС тонких пьезоплит с отверстиями и трещинами не проводились. Были решены лишь отдельные задачи для пьезоплит из материалов простейшей микроструктуры (с ограничениями на электрические свойства) и геометрии (в основном сплошных или имеющих круговую границу) [5–9].

Что касается плит с произвольными отверстиями и трещинами, то исследования по определению их ЭУС начали проводиться лишь в последние десятилетия. И здесь наиболее достоверные результаты получаются при использовании методов комплексных потенциалов. Эти функции, введенные в работе [10], уже были использованы при решении различных задач для многосвязной пластинки [11] и полуплоскости [12].

В данной статье с помощью метода комплексных потенциалов решена задача электроупругости для полосы с произвольными отверстиями и трещинами, в том числе выходящими на прямолинейные границы в виде выемов. При этом граничные условия как на контурах отверстий и трещин, так и на прямолинейных границах удовлетворяются обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [13].

### 1. Постановка и решение задачи.

Рассмотрим полосу из электроупругого материала, занимающую многосвязную область, ограниченную прямолинейными границами  $L^+$  (верхней),  $L^-$  (нижней) и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с полуосями  $a_l$ ,  $b_l$  (рис. 1). Каждый из эллипсов может переходить в прямолинейный разрез-трещину, пересекать прямолинейные границы, пересекать другие контуры. Отнесем плиту к прямоугольной системе координат  $Oxy$  с началом в произвольной точке полосы и осью  $Ox$ , параллельной прямолинейным границам. Обозначим расстояния от начала координат до прямолинейных границ  $L^+$ ,  $L^-$  соответственно через  $h^+$  и  $h^-$ .

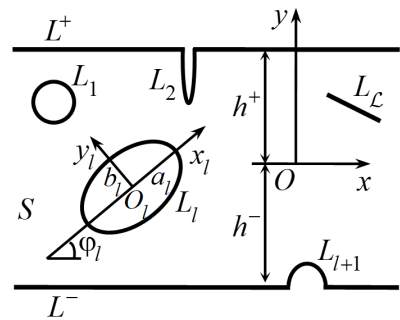


Рис. 1

Выберем локальные системы координат  $O_l x_l y_l$  с началами в центрах эллипсов  $L_l$  и осями  $O_l x_l$  вдоль полуосей  $a_l$  так, что уравнение  $L_l$  в локальной системе координат имеет вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в системе  $Oxy$  будет таким:

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом  $\varphi_l$  – угол между положительными направлениями осей  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемый от положительного направления  $Ox$  против часовой стрелки;  $x_{0l}$ ,  $y_{0l}$  – координаты начала локальной системы  $O_l x_l y_l$  в основной системе  $Oxy$ ;  $\theta$  – угловая переменная параметрического задания эллипса, изменяющийся в интервале от 0 до  $2\pi$ .

Будем считать, что прямолинейные границы  $L^+$ ,  $L^-$  и контуры отверстий не нагружены; на бесконечности полоса изгибается механическим моментом  $M_x^\infty$  и моментом электрической индукции  $M_{dx}^\infty$ ; моменты  $M_y^\infty$ ,  $H_{xy}^\infty$ ,  $M_{dy}^\infty$  в силу незагруженности прямолинейной границы равны нулю.

Если задачу об определении электроупругого состояния рассматриваемой полосы решать с использованием комплексных потенциалов электроупругости [10, 14], то она сводится к нахождению функций  $W'_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y,$$

где  $\mu_k$  – корни известного характеристического уравнения 6-го порядка, из граничных условий

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ik} W'_k(t_k) = (c_1, c_2, c_3) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

в которых

$$(g_{1k}, g_{2k}, g_{3k}) = (p_k / \mu_k, q_k, d_{yk}),$$

$p_k$ ,  $q_k$ ,  $d_{yk}$  – известные постоянные [10];  $c_i$  – комплексные постоянные, разные для разных эллиптических контуров и прямолинейных границ.

Обозначим заданную область, ограниченную прямолинейными границами и контурами отверстий через  $S$ , верхнюю полуплоскость с границей  $L^+$  – через  $S^+$ , нижнюю полуплоскость с границей  $L^-$  – через  $S^-$ . В областях комплексных переменных  $z_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) области  $S$  соответствуют многосвязные полосы  $S_k$  с прямолинейными границами  $L_k^+$ ,  $L_k^-$  и контурами отверстий  $L_{kl}$ .

Функции  $W'_k(z_k)$  определены в областях  $S_k$ , и на основе общих представлений комплексных потенциалов [10, 14] представимы в виде

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} W'_{kl}(z_k) + W_k'^+(z_k) + W_k'^-(z_k), \quad (3)$$

где  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left( p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = (-M_x^\infty, 0, 0, -M_{dx}^\infty, 0, 0);$$

$r_k, d_{xk}$  – известные постоянные [10], зависящие от коэффициентов деформации материала и пьезоэлектрических модулей деформации и напряженности и коэффициентов диэлектрической восприимчивости;  $W'_{kl}(z_k)$  – функции голоморфные вне  $L_{kl}$ ;  $W'_k{}^+(z_k)$  – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях с границами  $L_k^+$ ;  $W'_k{}^-(z_k)$  – функции, голоморфные в верхних полуплоскостях с границами  $L_k^-$ .

Используя конформные отображения внешности единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}, \end{aligned}$$

функции  $W'_{kl}(z_k)$ , голоморфные вне контуров  $L_{kl}$ , представим рядами Лорана вида

$$W'_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}$$

с неизвестными коэффициентами  $a_{kln}$ .

Для точек прямолинейных границ  $L^+$  и  $L_k^+$  соответствующих областей имеем

$$x = t, \quad y = ih^+, \quad t_k = x + \mu_k y = t + \mu_k h^+,$$

Если взять сопряжение от последнего равенства и перейти от получаемого  $\bar{t}_k$  к  $t_k$ , будем иметь

$$\bar{t}_k = x + \bar{\mu}_k y = x + \mu_k h^+ + (\bar{\mu}_k - \mu_k) h^+ = t_k + (\bar{\mu}_k - \mu_k) h^+.$$

Переходя в (4) к сопряженным величинам и заменив в равенствах  $\bar{t}_k$  на приведенное значение, запишем получаемое равенство в виде

$$t_k = \bar{z}_{kl} - (\bar{\mu}_k - \mu_k) h^+ + R_{kl} \left( \bar{\zeta}_{kl} + \frac{\bar{m}_{kl}}{\bar{\zeta}_{kl}} \right).$$

Переходя от контурного значения  $t_k$  на значения переменной в области  $z_k$  и заменив для удобства переменные  $\overline{\zeta_{kl}}$  на переменные  $\zeta_{kl}^+$ , получим связь

$$z_k = -(\overline{\mu_k} - \mu_k)h^+ + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} \left( \zeta_{kl}^+ + \frac{\overline{m_{kl}}}{\zeta_{kl}^+} \right), \quad (5)$$

которая, как видно, является конформным отображением эллипса  $L_{kl}^+$ , симметричного эллипсу  $L_{kl}$  области  $S_k$  относительно прямолинейной границы  $L_k^+$ . Тогда функцию  $W_k'^+(z_k)$ , голоморфную в нижней полуплоскости с границей  $L_k^+$ , можно выбрать в виде функции, голоморфной вне контуров  $L_{kl}^+$ , т. е. в виде [12]

$$W_k'^+(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{kln}}{(\zeta_{kl}^+)^n}$$

с неизвестными коэффициентами  $b_{kln}$ .

Аналогичным образом получаем представления голоморфных в верхних полуплоскостях с границами  $L_k^-$  функций

$$W_k'^-(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{kln}}{(\zeta_{kl}^-)^n},$$

в которых  $c_{kln}$  – неизвестные постоянные;  $\zeta_{kl}^-$  – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k = (\overline{\mu_k} - \mu_k)h^- + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} \left( \zeta_{kl}^- + \frac{\overline{m_{kl}}}{\zeta_{kl}^-} \right). \quad (6)$$

Окончательно, для комплексных потенциалов (3) будем иметь выражения

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) + b_{kln} \varphi_{kln}^+(z_k) + c_{kln} \varphi_{kln}^-(z_k)], \quad (7)$$

где

$$\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}, \quad \varphi_{kln}^+(z_k) = (\zeta_{kl}^+)^{-n}, \quad \varphi_{kln}^-(z_k) = (\zeta_{kl}^-)^{-n};$$

$\zeta_{kl}$ ,  $\zeta_{kl}^+$ ,  $\zeta_{kl}^-$  – функции, вычисляемые из неявных зависимостей (4), (5), (6);  $a_{kln}$ ,  $b_{kln}$ ,  $c_{kln}$  – неизвестные коэффициенты.

Постоянные  $a_{kln}$ ,  $b_{kln}$ ,  $c_{kln}$  ( $k = \overline{1, 3}$ ;  $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) определим из граничных условий (2) на прямолинейных границах  $L^+$ ,  $L^-$  и на контурах отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ), которые после дифференцирования по дугам контуров имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikp} \delta_{k,s} W_k''(t_{kp}) = 0, \quad (i = \overline{1, 3}; p = \overline{1, \mathcal{L} + 2}). \quad (8)$$

При этом для точек контуров отверстий  $\delta_{k,s} = \frac{dt_{kp}}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ ;  $x'$ ,  $y'$  – производные переменных (1) по угловой переменной  $\theta$  параметрического задания эллипсов;  $s$  – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки; для прямолинейных границ  $L^+$ ,  $L^-$  параметр  $\delta_{k,s} = 1$ .

Граничным условиям (8) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [13, 15, 16]. Для этого выберем «коллокационные отрезки» на прямолинейных границах  $L^+$  и  $L^-$ , затем на них и на контурах отверстий и трещин  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) систему точек  $M_{pm}$  ( $x_{pm}, y_{pm}$ ) ( $m = \overline{1, M_p}$ ;  $p = \overline{1, \mathcal{L} + 2}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (7). Тогда для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$ ,  $b_{kln}$  и  $c_{kln}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[ \varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} + \varphi'^+_{kln}(t_{kpm}) b_{kln} + \varphi'^-_{kln}(t_{kpm}) c_{kln} \right] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikp} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 3}; m = \overline{1, M_p}; p = \overline{1, \mathcal{L} + 2}). \end{aligned} \quad (9)$$

Кроме уравнений (9), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 i a_{kl1} = 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (10)$$

следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий  $L_l$ .

Систему (9), дополненную уравнениями (10), будем решать с использованием сингулярных разложений [17, 18]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные  $a_{kln}$ ,  $b_{kln}$  и  $c_{kln}$ , а, следовательно, и функции  $W'_k(z_k)$ , будут известными, и по ним можно вычислять основные характеристики ЭУС (моменты механические изгибающие, крутящий, индукций и перерезывающие силы на основных площадках) [10, 14]. По основным характеристикам можно найти также моменты на произвольных площадках. При этом, если некоторый эллипс  $L_l$  переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) [19].

Как частный случай из приведенного решения задачи электроупругости (ЭУ) следует решение задачи теории упругости (ТУ). Оно получается из приведенного, если в последнем принять равными нулю пьезоэлектрические модули деформации и напряженностей  $g_{ij}$ . Но для проведения численных исследований в задаче ТУ можно пользоваться программой решения задачи электроупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными  $g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}$  и принимая  $\lambda_g \leq 10^{-3}$ .

**2. Описание результатов численных исследований.** Были проведены численные исследования для плит из следующих пьезоэлектрических материалов: 1) Селенид кадмия CdSe (материал М1); 2) Пьезокерамика PZT-4 (материал

M2) [20]. Ненулевые упругие и пьезоэлектрические постоянные этих материалов приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Физико-механические постоянные материалов

Величина	Материалы	
	ЭМ1	ЭМ2
$s_{11}/s_0$	22,260	10,745
$s_{22}/s_0$	14,984	7,398
$s_{66}/s_0$	47,481	7,637
$s_{12}/s_0$	-6,437	-2,542
$g_{16}/g_0$	109,22	2,054
$g_{21}/g_0$	-4,333	-1,159
$g_{22}/g_0$	8,016	2,458
$\beta_{11}/\beta_0$	19,612	0,106
$\beta_{22}/\beta_0$	10,612	0,090

$$s_0 = 10^{-6} \text{МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{МКл}^{-1} \text{м}^{-2}, \quad \beta_0 = 10^3 \text{МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}.$$

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (7) для каждого отверстия  $L_p$  и «коллокационных точек»  $M_p$  на этих контурах и на «коллокационных отрезках» прямолинейных границ, для которых составлялись уравнения (9), увеличивалось до тех пор, пока однородные граничные условия на контурах отверстий и на прямолинейных границах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал  $10^{-3}$ ). В качестве «коллокационных отрезков» на прямолинейных границах выбирались отрезки, за пределами которых влияние отверстий и трещин на значения исследуемых величин незначительно. В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 20 до 120 членов, на каждом из контуров отверстий и на «коллокационных отрезках» прямолинейной границы брать от 100 до 800 «коллокационных точек». При этом в качестве «коллокационных отрезков» на прямолинейных границах были отрезки длины 2–10 диаметров основного концентратора моментов с центром в точке, где наиболее существенно влияние отверстий и трещин.

В таблице 2 для задач ЭУ и ТУ об изгибе моментами  $M_x^\infty = m_x$  полосы с центральным круговым отверстием радиуса  $a_1$  (рис. 2) с точностью до множителя  $m_x$  приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках полосы в зависимости от отношения  $c_1/a_1$ , где  $c_1$  – длина перемычки между контуром отверстия и границами полосы. При этом характерными были

точки  $B(a_1, 0)$ ,  $C(0, a_1)$ ,  $D^+(0, a_1 + c_1)$ ,  $E^+(a_1, a_1 + c_1)$ . На рисунке 3 для полосы из более пьезоактивного материала М2, для некоторых значений  $c_1/a_1$  изображены графики распределения  $M_s/m_x$  по контуру отверстия в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от оси  $Ox$  против часовой стрелки, а на рисунке 4 изображены графики распределения моментов  $M_x/m_x$  по некоторому отрезку прямолинейной границы  $L^+$ .

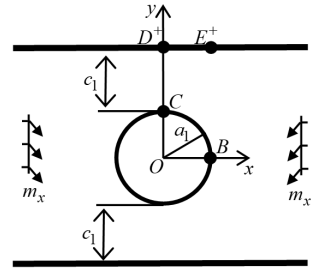


Рис. 2

Таблица 2.

Значения изгибающих моментов в некоторых точках полосы с центральным круговым отверстием в зависимости от  $c_1/a_1$

Материал	Точка	Момент	Задача	$c_1/a_1$				
				$\infty$	2	1	0,5	0,1
М1	B	$M_y$	ЭУ	0,397	0,391	0,389	0,376	0,293
			ТУ	0,220	0,220	0,220	0,217	0,196
	C	$M_x$	ЭУ	1,760	1,937	2,272	3,061	9,234
			ТУ	1,713	1,904	2,257	3,069	9,338
	$D^+$	$M_x$	ЭУ	1,000	1,349	1,805	2,717	9,107
			ТУ	1,000	1,313	1,782	2,704	9,098
	$E^+$	$M_x$	ЭУ	1,000	1,198	1,326	1,431	1,272
			ТУ	1,000	1,206	1,346	1,458	1,471
М2	B	$M_y$	ЭУ	-0,058	-0,058	-0,058	-0,041	-0,044
			ТУ	-0,070	-0,078	-0,094	-0,080	-0,060
	C	$M_x$	ЭУ	1,421	1,663	2,048	2,936	9,568
			ТУ	1,421	1,649	2,036	2,883	9,051
	$D^+$	$M_x$	ЭУ	1,000	1,407	1,874	2,810	9,488
			ТУ	1,000	1,393	1,864	2,759	8,971
	$E^+$	$M_x$	ЭУ	1,000	1,183	1,248	1,311	1,296
			ТУ	1,000	1,174	1,240	1,288	1,231

Из данных таблицы 2, рисунка 3 и рисунка 4 следует, что влияние прямолинейных границ полосы на электроупругое состояние около отверстия значительно, если отверстие находится на расстоянии менее диаметра отверстия от прямолинейных границ ( $c_1/a_1 < 2$ ). На значения моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала полосы. Последнее особенно ярко видно из сравнения значений моментов в точке  $C$ , где учет пьезосвойств приводит к значительному изменению (уменьшению для М1 и увеличению для М2) значений моментов в этой точке. Поэтому при исследовании напряженного состояния плит из пьезоматериалов нельзя ограничиваться решением задачи теории упругости, а нужно решать задачу электроупругости.

В таблице 3 для задач ЭУ и ТУ об изгибе моментами  $M_x^\infty = m_x$  полосы из М2 с круговым отверстием радиуса  $a_1$  и двумя симметричными краевыми

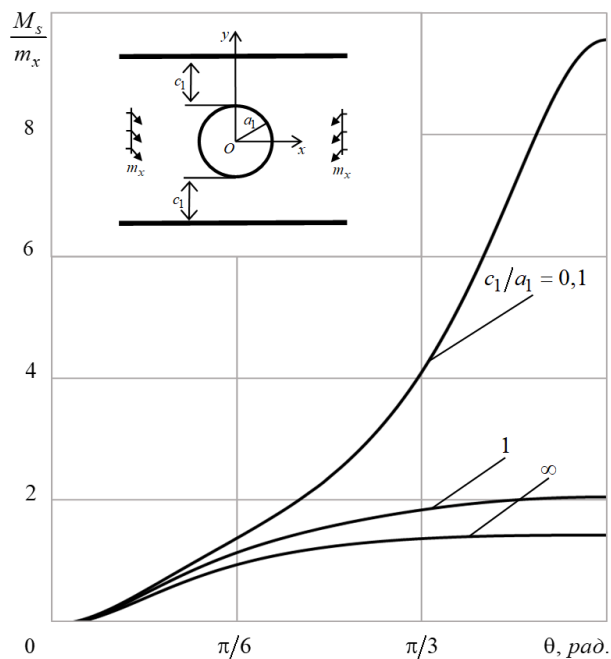


Рис. 3. Графики распределения моментов  $M_s/m_x$  около контура кругового отверстия в полосе из материала М2 для некоторых значений  $c_1/a_1$

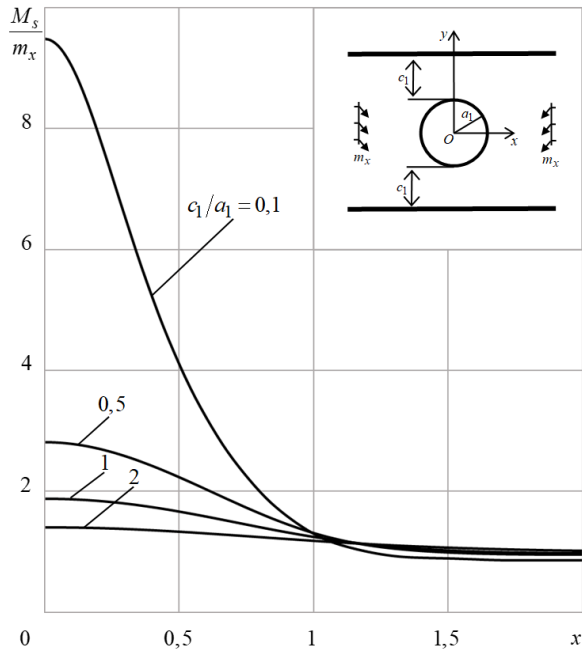


Рис. 4. Графики распределения  $M_x/m_x$  по отрезку прямолинейной границы  $L^+$  в полосе с круговым отверстием из материала М2 для некоторых значений  $c_1/a_1$

трещинами длины  $l_2$  (рис. 5) с точностью до множителя  $m_x$  приведены значения изгибающих моментов и КИМ в некоторых характерных точках в зависимости от отношения  $l_2/a_1$ . При этом ширина полосы равна  $4a_1$ , а характерными точками были  $B(a_1, 0)$ ,  $F(0, a_1 + l_2)$ ,  $D^+(0, 2a_1)$ ,  $E^+(a_1, 2a_1)$ . На рисунке 6 для этого же случая изображены графики распределения моментов  $M_s/m_x$  по контуру кругового отверстия в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от оси  $Ox$  против часовой стрелки, для некоторых значений  $l_2/a_1$  в случае задачи ЭУ для полосы из материала М2.

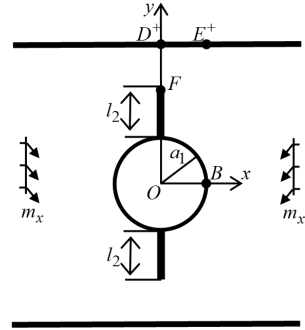


Рис. 5

Таблица 3.

Значения изгибающих моментов и КИМ в некоторых точках полосы с центральным круговым отверстием и двумя симметричными краевыми трещинами из него в зависимости от  $l_2/a_1$

Материал	Точка	Величина	Задача	$l_2/a_1$				
				0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
М2	B	$M_y$	ЭУ	-0,089	-0,087	-0,095	-0,094	-0,118
			ТУ	-0,067	-0,067	-0,067	-0,067	-0,066
	F	$k_1^+$	ЭУ	0,654	1,153	1,587	2,186	3,857
			ТУ	0,554	1,021	1,432	2,027	3,654
	D <sup>+</sup>	$M_x$	ЭУ	1,931	2,162	2,725	4,258	12,312
			ТУ	1,912	2,129	2,691	4,190	12,192
	E <sup>+</sup>	$M_x$	ЭУ	1,265	1,264	1,262	1,268	1,253
			ТУ	1,255	1,252	1,247	1,238	1,218

Как видно, с увеличением длин трещин значения основных характеристик ЭУС в зонах перемычек и КИМ для концов трещин резко растут. При этом значения  $M_s/m_x$  около контура отверстия вблизи трещин резко уменьшаются, практически не изменяясь вдали от трещин.

На рисунке 7 для полосы из материала М2 с двумя симметричными круговыми выемами радиуса  $a_1$  для некоторых значений отношения  $c_1/a_1$ , где  $c_1$  – длина перемычки между ближайшими точками выемок, изображены графики распределения моментов  $M_s/m_x$  по контуру нижнего выема в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от оси  $Ox$  против часовой стрелки.

Видно, что сближение границ полосы с выемами друг к другу приводит к существенному росту значений основных характеристик ЭУС в перемычке и на контурах выемок в зоне перемычки, практически не изменяясь в остальных зонах.

**Выводы.** Таким образом, дано решение задачи об изгибе тонкой многосвязной пьезополосы с произвольно расположенными относительно друг друга и

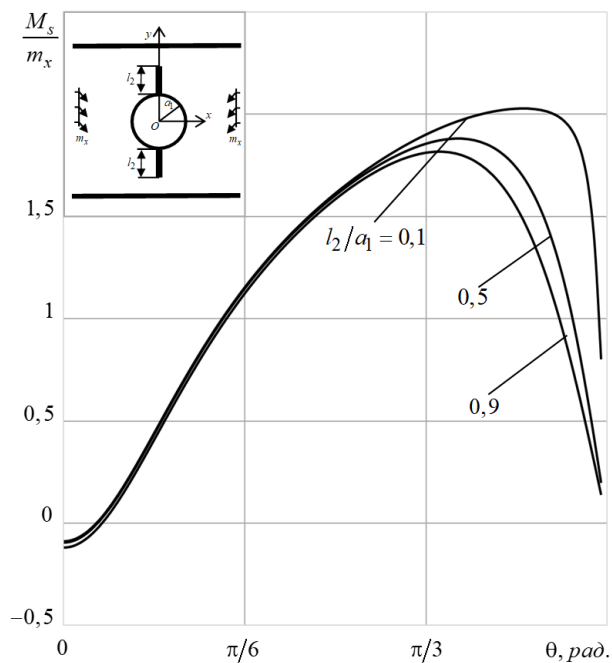


Рис. 6. Графики распределения  $M_s/m_x$  около контура кругового отверстия с двумя краевыми трещинами в полосе из M2 для некоторых значений  $l_2/a_1$

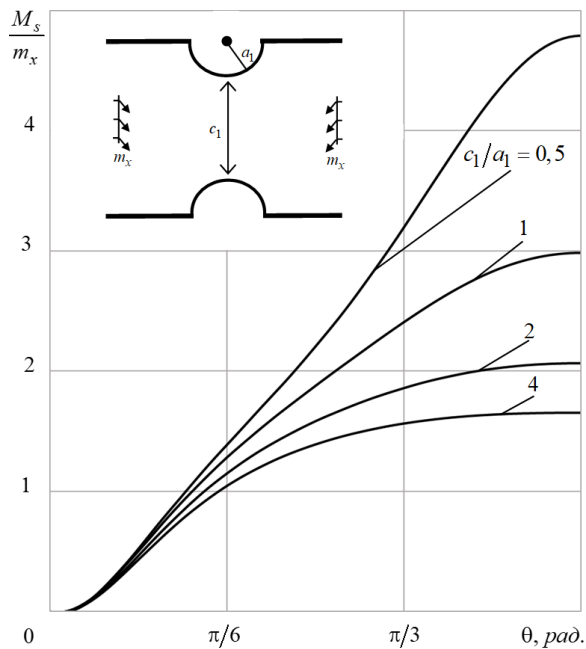


Рис. 7. Графики распределения  $M_s/m_x$  около контура нижнего выема в полосе из M2 с двумя симметричными круговыми выемами для некоторых значений  $c_1/a_1$

относительно прямолинейных границ отверстиями и трещинами, в том числе пересекающимися друг друга и прямолинейные границы. Для решения задачи использованы комплексные потенциалы теории изгиба тонких электроупругих плит [10, 14], их разложение в ряды Лорана, удовлетворение граничным условиям на контурах отверстий, трещин и на прямолинейных границах обобщенным методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для полосы с центральным круговым отверстием, центральным круговым отверстием и двумя симметричными краевыми трещинами из него, с двумя круговыми выемками на прямолинейных границах полосы. Изучены закономерности изменения ЭУС плиты в зависимости от ее материала и геометрических характеристик отверстий и трещин. Установлено, что, если отверстия (трещины) располагаются на значительном расстоянии (более их диаметров) от прямолинейных границ, то полученные результаты совпадают с аналогичными для бесконечной многосвязной плиты [11]. Также установлено, что на значения механических и индукционных изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала полосы и им пренебрегать нельзя.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. *Eringen A.C.* Electrodynamics of Continua I / A.C. Eringen, G.A. Maugin. – New York: Springer, 1990. – 436 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-3226-1.
3. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюл. Рос. магнит. о-ва. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
4. *Fang D.* Fracture mechanics of piezoelectric and ferroelectric solids / D. Fang, J. Liu. – Springer Berlin, Heidelberg, 2013. – 417 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-30087-5.
5. *Iesan D.* On the bending of piezoelectric plates with microstructure / D. Iesan // Acta Mech. – 2008. – Vol. 198, N. 3. – P. 191–208. – DOI: 10.1007/s00707-007-0527-8
6. *Xu S.-P.* Bending of piezoelectric plates with a circular hole / S.-P. Xu, W. Wang // Acta Mech. – 2009. – Vol. 203. – P. 127–135. – DOI: 10.1007/s00707-008-0025-7. – EDN: MQIZFG.
7. *Zhou Y.* Vibration and bending analysis of multiferroic rectangular plates using third-order shear deformation theory / Y. Zhou, J. Zhu // Composite Structures. – 2016. – Vol. 153. – P. 712–723. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.06.064.
8. *Dai M.* An anisotropic piezoelectric half-plane containing an elliptical hole or crack subjected to uniform in-plane electromechanical loading / M. Dai, C.-F. Gao, P. Schiavone // Journal of mechanics of materials and structures. – 2016. – Vol. 11, No. 4. – P. 433–448. – DOI: 10.2140/jomms.2016.11.433. – EDN: XZGMUN.
9. *Moradi-Dastjerdi R.* Thermo-electro-mechanical behavior of an advanced smart lightweight sandwich plate / R. Morandi-Dastjerdi, K. Behdinin // Aerospace Science and Technology. – 2020. – Vol. 106. – P. 106–142. – DOI: 10.1016/j.ast.2020.106142.
10. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38. – EDN: EZZZBN.
11. Калоеров С.А. Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе многосвязной плиты / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 4. – С. 143–155. – DOI: 10.15372/PMTF20220415. – EDN: LWKFFP.
12. Калоеров С.А. Решение задачи об изгибе многосвязной пьезополуплоскости с приближен-

- ным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестн. ДонНУ. Сер. А: Естеств. науки. – 2024. – № 1. – С. 28-41. – DOI:10.5281/zenodo.12527097. – EDN: BYCRBC.
13. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
  14. Калоеров С.А. Задачи электроругового, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит, как частные случаи задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 3–4. – С. 58–79. – EDN: ZZEFFN.
  15. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
  16. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
  17. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, N. 4. – P. 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
  18. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, N. 4. – P. 1343–1362. – DOI: 10.1137/05063920X.
  19. Калоеров С. А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроруговых анизотропных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007.– Т. 43, № 6. – С. 56–62.
  20. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Materials. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001.

**S.A. Kaloerov, A.V. Seroshtanov, L.P. Vovk**

**Electroelastic state of a multiply connected piezostrip under its transverse bending.**

Using complex potentials of the theory of bending of electroelastic thin plates, the problem of bending a strip with arbitrary holes and cracks, including intersecting with each others and crossing rectilinear boundaries, is solved. The complex potentials are represented as Laurent series with unknown coefficients determined from the boundary conditions on the contours of the holes and rectilinear boundaries using the generalized least squares method. The results of numerical studies are described for a strip with a central circular hole, with a central circular hole and two symmetrical edge cracks from it, and with two circular recesses on the rectilinear boundaries of the strip. The patterns of change in the electroelastic state of the strip depending on the geometric characteristics of the holes and cracks, as well as their relative positions, are investigated. It has been established that as the rectilinear boundaries of the strip approach the hole or crack, the values of the bending moments at the jumper points increase sharply, changing slightly in other zones of the strip. A high concentration of moments is also observed at the points of the rectilinear boundaries of the strip near the jumpers. The values of bending moments are significantly affected by taking into account the piezoelectric properties of the material, especially in areas of high concentration of bending moments, therefore in these cases one cannot limit oneself to solving the problem of elasticity theory about the bending of the plate, but must solve the problem of electroelasticity.

**Keywords:** *thin piezo plate, strip, holes, cracks, complex potentials, generalized least squares method, bending moments intensity factors.*

*Статья поступила в редакцию 25.11.2025;  
доработана 10.12.2025;  
рекомендована к печати 19.12.2025.*