

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-133-149

EDN:OXEWBB

©2025. М.А. Полянский¹

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

Решена задача электроупругости для пьезополуплоскости с внутренними эллиптическими отверстиями и прямолинейными разрезами-трещинами. Задача решена с использованием комплексных потенциалов плоской задачи электроупругости. Функции, голоморфные вне эллипсов и разрезов-трещин, представлены рядами Лорана, функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, методом интегралов типа Коши выражены через функции, получаемые от функций, голоморфных вне отверстий и разрезов, при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе. Затем определение неизвестных коэффициентов рядов из граничных условий на контурах отверстий и разрезов обобщенным методом наименьших квадратов приведено к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с отверстиями и трещинами с установлением закономерностей изменения электроупругого состояния полуплоскости в зависимости от ее материалов, геометрических характеристик отверстий и трещин.

Ключевые слова: электроупругая пластинка, полуплоскость, отверстия, комплексные потенциалы, интегралы типа Коши, обобщенный метод наименьших квадратов.

Введение. Пьезопластики, содержащие отверстия и разрезы (трещины), являются распространенными конструкционными элементами современных научно-технических устройств [1–4]. Около отверстий и трещин в таких пластинках под действием различных механических сил и электрических полей могут возникать высокие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Наиболее достоверные результаты по определению электроупругого состояния (ЭУС) пластин с отверстиями и трещинами получаются при решении соответствующих задач методами, использующими комплексные потенциалы [5]. К настоящему времени с использованием последних функций решены широкие классы задач для конечных и бесконечных пластин с произвольными отверстиями и трещинами [5]. Для случая многосвязной полуплоскости наиболее достоверные результаты получаются, если к граничным условиям на прямолинейной границе применить метод интегралов типа Коши, что позволяет удовлетворять этим условиям точно. При приближенном

¹Полянский Максим Алексеевич – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: m4xpolyan@yandex.ru

Polianskii Maxim Alekseevich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

же удовлетворении граничным условиям на контурах отверстий и трещин наиболее точные результаты дает использование обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК) [6–8].

В данной работе с использованием комплексных потенциалов, метода интегралов типа Коши при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе и ОМНК при удовлетворении граничным условиям на контурах отверстий и трещин дано решение задачи электроупругости для полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с круговым отверстием, с прямолинейным разрезом.

1. Постановка и решение задачи. Рассмотрим занимающую нижнюю полуплоскость с эллиптическими отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) и полуосями a_l, b_l (рис. 1) пьезопластинку, отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от прямолинейной границы L^+ и осью Ox , параллельной прямолинейной границе. Будем считать, что прямолинейная граница не нагружена механическими и электрическими воздействиями, контуры отверстий L_l нагружены самоуравновешенными внешними усилиями и электрическими индукциями, на бесконечности заданы напряжения σ_x^∞ и проекция вектора электрической индукции D_x^∞ (или напряженности E_x^∞), остальные напряжения, индукции (напряженности) и угол жесткого поворота полуплоскости, как целой, равны нулю, т. е. $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_y^\infty = \omega_3^\infty = 0$ (или $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = E_y^\infty = \omega_3^\infty = 0$).

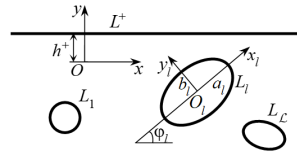


Рис. 1.

Отнесем эллипсы L_l к локальным системам координат $O_l x_l y_l$ с началами в их центрах и направлениями осей Ox_l вдоль полуосей эллипсов a_l , так что в системе $O_l x_l y_l$ параметрическое уравнение эллипса L_l будет таким:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \tag{1}$$

а в основной системе координат Oxy имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \tag{2}$$

где θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки.

Если задачу по определению ЭУС рассматриваемой полуплоскости решать с использованием комплексных потенциалов электроупругости [5], то она сводится к нахождению из соответствующих граничных условий функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \tag{3}$$

где μ_k – корни характеристического уравнения 6-го порядка

$$l_{4s}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}^2(\mu) = 0; \quad (4)$$

$l_{ij}(\mu)$ – полиномы вида

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\ l_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}; \end{aligned} \quad (5)$$

s_{ki} – коэффициенты деформации материала пластинки, измеренные при постоянных индукциях электрического поля; g_{ki} – пьезоэлектрические коэффициенты деформации и напряженностей электрического поля, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ki} – коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренные при постоянных значениях напряжений.

Граничные условия на контуре L_l (механические и электрические) для определения комплексных потенциалов имеют вид [5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikl} \Phi_k(t_k) = f_{il}(t), \quad (6)$$

в котором в случае механических граничных условий (при $i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} (g_{1kl}, g_{2kl}) &= (1, -\mu_k), \\ (f_{1l}(t), f_{2l}(t)) &= \mp \int_0^s (Y_{nl}, X_{nl}) ds + (c_{1l}, c_{2l}), \end{aligned} \quad (7)$$

если на границе заданы усилия Y_{nl}, X_{nl} , и

$$\begin{aligned} (g_{1kl}, g_{2kl}) &= (p_k, q_k), \\ (f_{1l}(t), f_{2l}(t)) &= (u_l^* + \omega_{3l}y + c_{1l}, v_l^* - \omega_{3l}x + c_{2l}), \end{aligned} \quad (8)$$

когда на границе заданы перемещения u_l^*, v_l^* ; в случае электрических граничных условий (при $i = 3$)

$$\begin{aligned} g_{3kl} &= -\nu_k, \\ f_{3l}(t) &= \mp \int_0^s D_{nl} ds + c_{3l}, \end{aligned} \quad (9)$$

если на границе задан вектор индукции поля D_{nl} ,

$$\begin{aligned} g_{3kl} &= r_k, \\ f_{3l}(t) &= \varphi_l^*(t) + c_{3l}, \end{aligned} \quad (10)$$

когда на границе задан потенциал поля $\varphi_l^*(t)$;

$$\begin{aligned} p_k &= s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})\nu_k, \\ q_k &= s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\right)\nu_k, \\ r_k &= g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \nu_k &= \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}, \quad \Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \\ \Delta_{1k} &= \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (12)$$

c_{il} – постоянные, произвольные на одном из контуров отверстий; ω_{3l} – угол поворота контура отверстия как целого в случае жесткого его подкрепления.

В рассматриваемом случае комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в многосвязных нижних полуплоскостях S_k , ограниченных прямолинейными границами L_k^+ и контурами отверстий L_{kl} , соответствующих исходным прямолинейной границе L^+ и контурам отверстий L_l , и имеют вид [5]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k), \quad (13)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений 6-го порядка

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k) \Gamma_k = (0, 0, \sigma_x^\infty, 0, 0, D_x^\infty), \quad (14)$$

если на бесконечности заданы векторы индукций поля, или из системы уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, r_k^0, \mu_k r_k^0) \Gamma_k = (0, 0, \sigma_x^\infty, 0, -E_x^\infty, 0), \quad (15)$$

когда на бесконечности заданы векторы напряженностей поля; $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях с прямолинейными границами L_k^+ , соответствующих прямолинейной границе L^+ при аффинных преобразованиях (3); $\Phi_{kl}(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl} областей S_k , соответствующих эллипсам L_l области S при аффинных преобразованиях (3). Для построения указанных функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} , используя формулы [9]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (16)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

После этих конформных отображений функции $\Phi_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), голоморфные вне отверстий с контурами L_{kl} , в областях переменных ζ_{kl} будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$, включая бесконечно удаленную точку, и здесь их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl} , т. е. $\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}$. Окончательно для комплексных потенциалов (13) имеем

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (17)$$

где

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n(z_k)} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

a_{kln} – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах пластинки.

Для свободной от внешних усилий и электрических воздействий прямолинейной границы (для этого случая коэффициенты перед комплексными потенциалами в граничных условиях обозначим индексом ноль вверху, в отличие от пьезоэлектрических коэффициентов деформации g_{1k}), в граничных условиях имеем

$$g_{1kl} = g_{1k}^0 = 1, \quad g_{2kl} = g_{2k}^0 = -\mu_k, \quad g_{3kl} = g_{3k}^0 = -\nu_k,$$

$$(f_1^+(t), f_2^+(t), f_3^+(t)) = \int_0^s (Y_n^+, X_n^+, D_n^+) ds + (c_1^+, c_2^+, c_3^+). \quad (18)$$

Тогда граничные условия (6) на прямолинейной границе L^+ можно записать в виде системы 3 линейных уравнений

$$g_{1k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{1k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{1k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) = - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{1k+q-1}^0 \Phi_{k+q-1}(t_k)},$$

$$g_{2k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{2k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{2k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) = - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{2k+q-1}^0 \Phi_{k+q-1}(t_k)}, \quad (19)$$

$$g_{3k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{3k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{3k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) = - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{3k+q-1}^0 \Phi_{k+q-1}(t_k)}$$

с определителем

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} g_{1k}^0 & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 \\ g_{2k}^0 & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 \\ g_{3k}^0 & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 g_{ik}^0 M_{ik}, \quad (20)$$

в котором M_{ik} – алгебраические дополнения элементов первого столбца g_{ik}^0 .

Решая систему (19), найдем

$$\Phi_k(t_k) = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta_k},$$

где

$$\Delta_{kk} = \begin{vmatrix} f_1^+(t) - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{1k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 \\ f_2^+(t) - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{2k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 \\ f_3^+(t) - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{3k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 \end{vmatrix}$$

или

$$\Phi_k(t_k) = -\frac{1}{\Delta_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{q=1}^3 \overline{g_{ik+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} M_{ik}.$$

Окончательно граничные условия на прямолинейной границе запишем в виде

$$\Phi_k(t_k) = \sum_{i=1}^3 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} f_i^+(t) - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (21)$$

где

$$\overline{r_{kk+q-1}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\overline{g_{ik+q-1}^0}}{\Delta_k} M_{ik}. \quad (22)$$

Для точек прямолинейной границы L^+ имеем

$$\begin{aligned} x &= t, \quad y = h^+, \quad z = x + iy = t + ih^+, \\ z_k &= t_k = x + \mu_k y = t + \mu_k h^+, \\ \overline{t_k} &= t + \overline{\mu_k} h^+ = t + \mu_k h^+ + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+ = t_k + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+, \\ \overline{t_{k+q-1}} &= t + \overline{\mu_{k+q-1}} h^+ = t + \mu_k h^+ + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ = \\ &= t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \quad (q = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (23)$$

Подставив функции (13) в граничные условия (21) на прямолинейной границе L^+ , получим

$$\Phi_{k0}(t_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k) = - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1}} \left[\Phi_{k+q-1,0}(t_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \overline{\Phi_{k+q-1l}}(\overline{t_{k+q-1}}) \right]. \quad (24)$$

На прямолинейной границе для граничных значений сопряженных величин имеем

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_{k+q-1,0}(t_{k+q-1})} &= \overline{\Phi_{k+q-1,0}(t_{k+q-1})} = \overline{\Phi_{k+q-1,0}(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+)}, \\ \overline{\Phi_{k+q-1l}(t_{k+q-1})} &= \overline{\Phi_{k+q-1l}(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+)} = \\ &= \Phi_{k+q-1l}^+(t_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_{k+q-1ln}}}{\left[\zeta_{k+q-1l}^+(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+)\right]^n}. \end{aligned} \quad (25)$$

Кроме того, при переходе в конформных отображениях (16) к сопряженным величинам и замене граничных значений по формулам (23) для граничных значений переменных находим

$$\overline{z_{k+q-1}} = t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+ = \overline{z_{k+q-1l}} + \overline{R_{k+q-1l}} \left(\zeta_{k+q-1l}^+ + \frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\zeta_{k+q-1l}^+} \right) \quad (q = \overline{1, 3}). \quad (26)$$

Заменяя в этих соотношениях граничные значения t_k переменными z_k областей S_k , приходим к конформным отображениям

$$z_k = -(\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+ + \overline{z_{k+q-1l}} + \overline{R_{k+q-1l}} \left(\zeta_{k+q-1l}^+ + \frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\zeta_{k+q-1l}^+} \right) \quad (q = \overline{1, 3}), \quad (27)$$

где переменная $\bar{\zeta}$ для лучшего восприятия заменена на ζ^+ , что подчеркивает ее происхождение от условий на границе L^+ .

Можно показать, что равенства (27) представляет собой конформные отображения внешности единичных кругов $|\zeta_{k+q-1l}^+| \geq 1$ на внешности контуров L_{k+q-1l}^+ верхней (относительно границы L_k^+) полуплоскости S_k^+ переменной z_k . Например, в случае ортотропной полуплоскости, когда комплексные параметры являются чисто мнимыми ($\mu_k = i\beta_k$), это будут эллипсы L_{k+q-1l}^+ симметричные эллипсам L_{k+q-1l} полуплоскостей S_k , где заданы исходные комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$. Следовательно, функции $\Phi_{k+q-1l}^+(z_k)$ являются функциями, голоморфными вне контуров L_{k+q-1l}^+ верхних полуплоскостей S_k^+ (а следовательно, они голоморфны в нижних полуплоскостях S_k) и для них имеют место разложения в ряды Лорана вида

$$\Phi_{k+q-1l}^+(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{k+q-1ln}} \varphi_{k+q-1ln}^+(z_k), \quad (28)$$

где

$$\varphi_{k+q-1ln}^+(z_k) = \frac{1}{\left(\zeta_{k+q-1l}^+\right)^n},$$

ζ_{k+q-1l}^+ – переменные, определяемые из конформных отображений (27).

Исходя из указанных свойств входящих в условия (24) функций, умножив обе части этих условий на ядро Коши $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t-z_k}$ и вычислив интегралы типа Коши от них по бесконечной прямой L_k^+ , получим

$$\Phi_{k0}(z_k) = - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1} \Phi_{k+q-1l}} (t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+).$$

Подставив это значение функции $\Phi_{k0}(z_k)$ в (13), для комплексных потенциалов получим

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\Phi_{kl}(z_k) - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1} \Phi_{k+q-1l}} (z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+) \right],$$

а затем на основе разложений (28) будем иметь выражения

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1} a_{k+q-1ln} \psi_{k+q-1ln}(z_k)} \right], \quad (29)$$

в которых

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \psi_{k+q-1ln}(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{k+q-1l}^+)^n}. \quad (30)$$

Функции (29) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе и содержат неизвестные коэффициенты рядов Лорана a_{kln} . Для определения этих коэффициентов используем граничные условия (6) на контурах отверстий, предварительно продифференцировав их, чтобы исключить входящие в их правые части неизвестные аддитивные постоянные. Имеем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikl} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{il}(t)}{ds}, \quad (31)$$

где

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1} \psi'_{k+q-1ln}(z_k) a_{k+q-1ln}} \right]; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_{kln}(z_k) &= - \frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\ \psi'_{k+q-1ln}(z_k) &= - \frac{n}{(\zeta_{k+q-1l}^+)^{n-1} \overline{R_{k+q-1l}} \left((\zeta_{k+q-1l}^+)^2 - \overline{m_{k+q-1l}} \right)} \quad (q = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (33)$$

Функции (32) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе L^+ . Граничные же условия на контурах отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) будем

использовать для определения неизвестных постоянных a_{kln} ($k = \overline{1, 3}$; $l = \overline{1, \mathcal{L}}$, $n = 1, 2, \dots$). Этим граничным условиям (31) на контурах отверстий будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [6–8]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p области S систему точек M_{pm} (x_{pm}, y_{pm}) ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$, $m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (32). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[\varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1}} \psi'_{k+q-1ln}(t_{kpm}) \overline{a_{k+q-1ln}} \right] =$$

$$= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 3}; \quad p = \overline{1, \mathcal{L}}; \quad m = \overline{1, M_p}). \quad (34)$$

Систему (34) будем решать с использованием сингулярных разложений [10, 11]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln} , а следовательно и функции $\Phi_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭУС (напряжения, компоненты векторов индукций и напряженностей, перемещения и потенциалы поля), а в случае трещин и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). В частности, для основных напряжений и компонент векторов индукций и напряженностей имеют место формулы [5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k) \quad (35)$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k) \quad (36)$$

По основным напряжениям и компонентам векторов индукций можно найти также напряжения и компоненты векторов индукции и напряженностей на любых площадках с нормалью n и касательной s , используя формулы [5, 12, 13]

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)); \end{aligned} \quad (37)$$

$$D_n = D_x \cos^2(nx) + D_y \cos^2(ny). \quad (38)$$

При необходимости можно вычислить и деформации [12, 13]

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \varepsilon_x \cos^2(nx) + \varepsilon_y \cos^2(ny) + \gamma_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_x \cos^2(ny) + \varepsilon_y \cos^2(nx) - \gamma_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \gamma_{ns} &= 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cos(nx) \cos(ny) + \gamma_{xy} (\cos^2(nx) - \sin^2(ny)). \end{aligned} \quad (39)$$

Что же касается КИН, они также находятся по известным функциям с использованием формул [14]

$$k_1^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_{kl},$$

$$k_2^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [(1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_{kl},$$
(40)

где

$$M_{kl} = -\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}.$$
(41)

Здесь верхний знак соответствует правому концу разреза в локальной системе координат $O_l x_l y_l$, нижний – к его левому концу.

Как частные случаи из приведенного решения задачи электроупругости (ЭУ) следуют решения задачи теории упругости (ТУ). Это решение получается из приведенного решения, если в нем принять равными нулю g_{ki} , ν_{ki} . Но для проведения численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электроупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g'_{ki} = \lambda_g g_{ki}, \quad \nu'_{ki} = \lambda_g \nu_{ki},$$
(42)

где λ_g , λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала. При этом нужно принять для задач ЭУ $\lambda_g = 1$, а для задач ТУ $\lambda_g \leq 10^{-3}$.

2. Описание результатов численных исследований для полуплоскости с отверстиями и трещинами. Проведены численные исследования напряженно-деформированного состояния пьезополуплоскости из следующих материалов: композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [15, 16]; композит, упругие и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$ (М2) [17]; композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют $PZT - 4$ (М3) [17]. Исследования были проведены для случая растяжения полуплоскости усилиями $\sigma_x^\infty = p$. Считалось, что контуры отверстий (берега трещин) не подкреплены, на них механические и электрические воздействия отсутствуют. Количество членов в рядах (33) для каждого отверстия L_p и количество точек M_p на этом контуре, для которых составлялись уравнения (34), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений на площадках, касательных к контурам, не были менее 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 100 членов, и на каждом из контуров брать от 100 до 1000 «коллокационных точек».

В таблице 1 и таблице 2 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ полуплоскости с круговым отверстием или жестким включением радиуса a_1 (рис. 2) с точностью до множителя p приведены значения напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c/a_1 , где c – длина перемычки между контуром отверстия и прямолинейной границей. При этом характерными были точки $A(0, -a_1)$, $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$, $D(0, a_1 + c/2)$, $E(0, a_1 + c)$, $L(a_1, a_1 + c)$, $M(2a_1, a_1 + c)$.

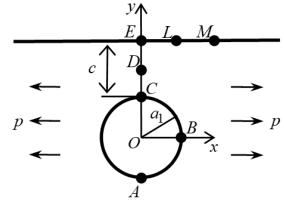


Рис. 2.

Таблица 1.

Значения напряжений в некоторых точках полуплоскости с неподкрепленным круговым отверстием в зависимости от c/a_1

Материал	Точка	Величина	c/a_1							
			∞	2	1	0,5	0,1	0,01	∞	0,01
			ЭУ						ТУ	
М1	A	σ_x	3,103	3,215	3,319	3,450	3,750	4,002	3,018	3,885
	B	σ_y	-0,960	-1,083	-1,160	-1,165	-0,823	-0,339	-1,027	-0,353
	C	σ_x	3,103	3,362	3,826	4,743	9,428	29,134	3,018	28,411
	D	σ_x	1,000	1,242	1,567	2,102	4,563	14,506	1,000	14,165
	E	σ_x	1,000	0,811	0,648	0,489	0,213	0,050	1,000	0,070
	L	σ_x	1,000	1,056	1,475	2,197	2,662	1,138	1,000	1,092
	M	σ_x	1,000	1,268	1,513	1,473	0,825	0,241	1,000	0,230
М2	A	σ_x	3,270	3,379	3,481	3,613	3,929	4,190	2,778	3,551
	B	σ_y	-1,273	-1,475	-1,600	-1,630	-1,175	-0,491	-1,228	-0,386
	C	σ_x	3,270	3,548	4,040	4,978	9,672	29,203	2,778	26,363
	D	σ_x	1,000	1,260	1,583	2,100	4,533	14,431	1,000	13,189
	E	σ_x	1,000	0,770	0,638	0,528	0,212	-0,050	1,000	0,116
	L	σ_x	1,000	1,123	1,567	2,269	2,769	1,192	1,000	0,962
	M	σ_x	1,000	1,293	1,460	1,409	0,810	0,254	1,000	0,207
М3	A	σ_x	2,573	2,683	2,777	2,886	3,115	3,299	2,377	3,013
	B	σ_y	-0,885	-0,957	-0,988	-0,955	-0,641	-0,273	-1,205	-0,332
	C	σ_x	2,573	2,830	3,267	4,120	8,455	25,991	2,377	23,703
	D	σ_x	1,000	1,219	1,555	2,110	4,352	13,087	1,000	11,949
	E	σ_x	1,000	0,845	0,658	0,455	0,328	0,207	1,000	0,210
	L	σ_x	1,000	1,012	1,453	2,119	2,265	0,895	1,000	0,774
	M	σ_x	1,000	1,267	1,509	1,373	0,681	0,165	1,000	0,155

На рисунке 3 для некоторых значений c/a_1 в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, для материала М2 изображены графики распределения по контуру отверстия нормальных напряжений σ_s/p на площадках, перпендикулярных контуру, а на рисунке 4 для некоторых значений c/a_1 даны графики распределения σ_x/p вдоль прямоли-

нейной границы, причем сплошные и штриховые линии рисунков относятся к решению задачи электроупругости и теории упругости соответственно.

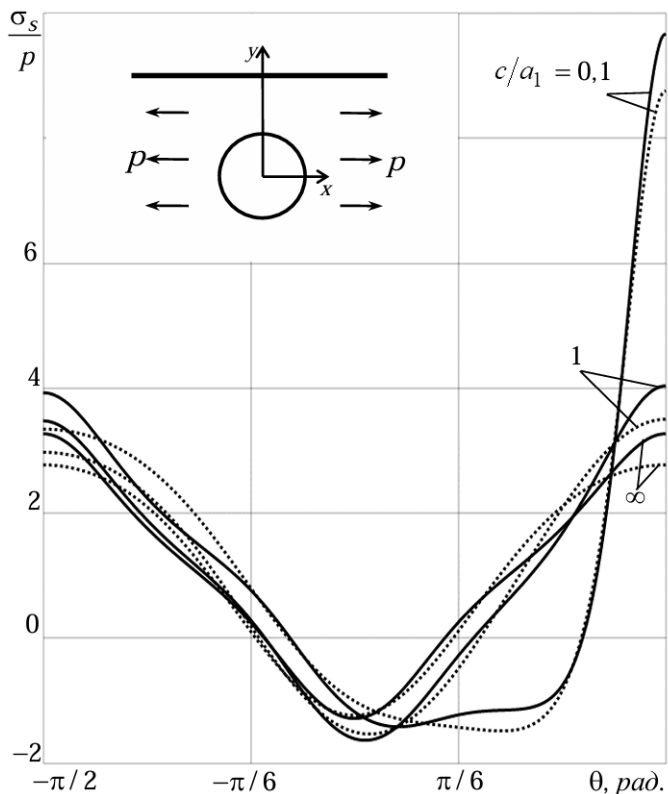


Рис. 3. Графики распределения напряжений σ_s/p около контура кругового отверстия в полуплоскости для некоторых значений c/a_1 .

Сплошные линии относятся к задаче ЭУ, штриховые – к задаче ТУ

Таблица 2.

Значения напряжений в некоторых точках полуплоскости с жестко подкрепленным круговым отверстием в зависимости от c/a_1 для М2

Точка	Величина	c/a_1							
		∞	2	1	0,5	0,1	0,01	∞	0,01
		ЭУ						ТУ	
A	σ_x	0,000	0,004	0,003	-0,001	-0,008	-0,009	0,003	-0,009
B	σ_y	0,559	0,550	0,544	0,539	0,536	0,535	0,673	0,611
C	σ_x	0,000	0,021	0,046	0,055	0,007	0,000	0,003	0,000
D	σ_x	1,000	0,885	0,748	0,542	0,055	0,000	1,000	0,000
E	σ_x	1,000	1,056	0,948	0,636	0,055	0,000	1,000	0,000
L	σ_x	1,000	0,941	0,821	0,748	0,760	0,778	1,000	0,744
M	σ_x	1,000	0,889	0,858	0,893	0,983	1,008	1,000	1,026

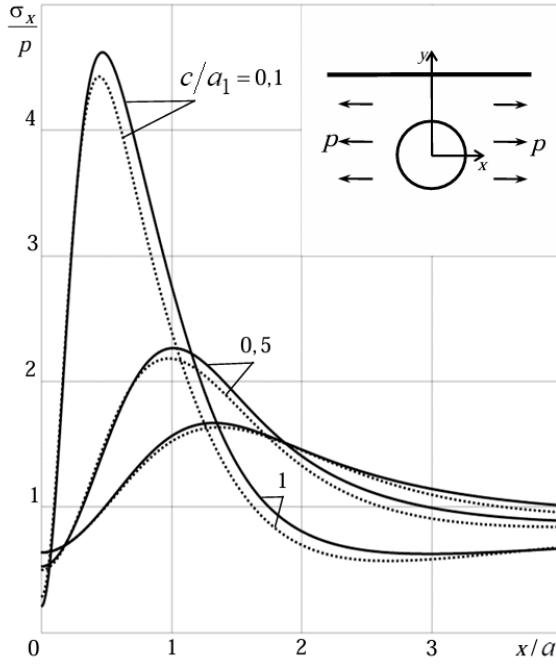


Рис. 4. Графики распределения σ_x/p по отрезку прямолинейной границы в полуплоскости с круговым отверстием для некоторых значений c/a_1 .
Сплошные линии относятся к задаче ЭУ, штриховые – к задаче ТУ.

Как следует из таблицы 1, таблицы 2, рисунка 3, рисунка 4, с приближением отверстия к прямолинейной границе полуплоскости происходит резкое увеличение значений напряжений около контура отверстия и в зоне между отверстием и прямолинейной границей, за исключением весьма малой окрестности точки перемычки на прямолинейной границе, где эти напряжения и их изменения невелики. Значения напряжений в указанных точках особенно велики в полуплоскости из материала М2. В точках высокой концентрации напряжений велика и доля пьезосвойств на значения напряжений.

В таблице 3 для растяжения полуплоскости из наиболее пьезоактивного материала М2 с вертикальной трещиной длины $2l_1$ усилиями $\sigma_x^\infty = p$ (рис. 5) с точностью до множителя p приведены значения КИН k_1 (в этом случае $k_2 = 0$) для концов трещины A, C и напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c/l_1 , где c – длина перемычки между трещиной и границей полуплоскости. При этом характерными точками были $D(0, l_1 + c/2)$, $E(0, l_1 + c)$, $L(l_1, l_1 + c)$, $M(2l_1, l_1 + c)$.

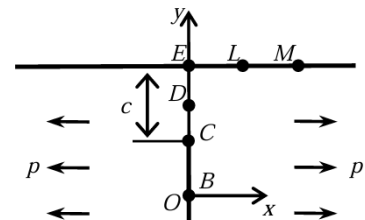


Рис. 5

Таблица 3.

Значения КИН и напряжений в некоторых точках полуплоскости из M2 с вертикальной трещиной или жестким включением в зависимости от c/l_1

Точка	Величина	c/l_1							
		∞	2	1	0,5	0,1	0,01	∞	0,01
		ЭУ						ТУ	
Трещина									
A	k_1^-	1,000	1,019	1,043	1,079	1,180	1,291	1,000	1,333
B	σ_y	-1,273	-1,306	-1,346	-1,396	-1,391	-1,136	-1,228	-1,027
C	k_1^+	1,000	1,027	1,073	1,169	1,681	3,480	1,000	3,650
D	σ_x	1,000	1,202	1,478	2,014	5,516	33,484	1,000	31,845
E	σ_x	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,964	1,000	0,972
L	σ_x	1,000	1,173	1,431	1,594	1,287	0,781	1,000	0,694
M	σ_x	1,000	1,147	1,169	1,084	0,788	0,550	1,000	0,497
Жесткое линейное включение									
A	k_1^-	0,061	0,060	0,059	0,057	0,054	0,053	0,066	0,057
B	σ_y	0,424	0,424	0,423	0,423	0,422	0,422	0,401	0,402
C	k_1^+	0,061	0,059	0,057	0,052	0,037	0,021	0,066	0,023
D	σ_x	1,000	1,014	1,036	1,088	1,416	2,591	1,000	2,543
E	σ_x	1,000	1,058	1,142	1,293	1,949	3,692	1,000	3,219
L	σ_x	1,000	1,008	0,972	0,943	0,939	0,943	1,000	0,945
M	σ_x	1,000	0,984	0,975	0,977	0,985	0,987	1,000	0,988

Как следует из данных таблицы 3, при приближении вертикальной трещины к границе полуплоскости значения напряжений в точках перемычки и КИН для ближайшей к границе полуплоскости резко растут. При этом незначительно растут также КИН для удаленного конца трещины и напряжения в точках вблизи перемычки.

В таблице 4 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ полуплоскости с круговым отверстием с контуром L_1 и радиусом a_1 ($b_1 = a_1$) на расстоянии $h = 2a_1$ от прямолинейной границы и разрезом с контуром L_2 длины a_1 (эллипсом, у которого $a_2 = a_1/2, b_2 = 0$) в перемычке на расстояниях c_1 и c_2 от контура отверстия и границы полуплоскости соответственно (рис. 6) с точностью до множителя p приведены значения напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости и КИН для концов трещины в зависимости от отношения c_1/a_1 . При этом $c_2 = 2a_1 - a_1 - c_1$ и характерными были точки $A(0, -a_1), B(a_1, 0), C(0, a_1), G(0, a_1 + c_1), H(0, 2a_1 + c_1), E(0, 3a_1), L(a_1, 3a_1), M(2a_1, 3a_1)$.

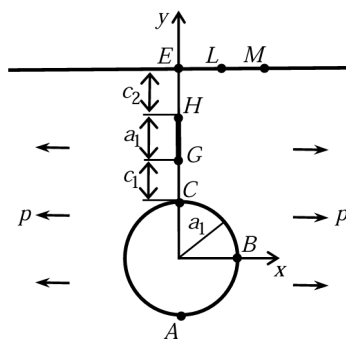


Рис. 6

Значения, соответствующие $c_1/a_1 = 0$, относятся к полуплоскости с круговым отверстием и краевой трещиной длины a_1 из контура отверстия.

Таблица 4.
Значения некоторых величин в точках полуплоскости

Точка	Величина	c/a_1							
		0	0,1	0,3	0,5	0,9	0,99	0	0,99
		ЭУ						ТУ	
		Трещина + жестко подкрепленное отверстие							
A	σ_x	0,002	0,008	0,011	0,013	0,022	0,030	0,006	0,028
B	σ_y	0,569	0,563	0,563	0,560	0,553	0,550	0,676	0,686
C	σ_x	-	0,500	0,237	0,159	0,137	0,180	-	0,159
G	k_1^-	-	0,341	0,511	0,587	0,708	0,793	-	0,824
H	k_1^+	0,542	0,581	0,631	0,675	0,927	1,809	0,513	1,966
E	σ_x	1,043	1,036	1,028	1,022	0,999	0,948	1,066	1,006
L	σ_x	1,015	1,037	1,063	1,070	0,829	0,545	1,028	0,501
M	σ_x	0,904	0,907	0,899	0,875	0,750	0,660	0,858	0,645
		Линейное включение + отверстие							
A	σ_x	3,376	3,378	3,379	3,379	3,379	3,379	2,883	2,884
B	σ_y	-1,482	-1,480	-1,477	-1,477	-1,479	-1,479	-1,398	-1,402
C	σ_x	-	3,545	3,705	3,630	3,578	3,571	-	3,060
G	k_1^-	-	0,007	0,029	0,026	0,029	0,029	-	0,032
H	k_1^+	0,016	0,019	0,030	0,032	0,027	0,015	0,019	0,016
E	σ_x	0,773	0,781	0,823	0,866	1,304	2,536	0,808	2,248
L	σ_x	1,124	1,121	1,109	1,106	1,108	1,111	1,078	1,071
M	σ_x	1,293	1,293	1,291	1,291	1,294	1,294	1,285	1,288

Выводы. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов плоской задачи электроупругости решена задача об ЭУС пьезополуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами при произвольном их количестве, конфигурации и взаиморасположении. При этом граничные условия на прямолинейной границе удовлетворяются точно методом интегралов типа Коши, и вся задача сводится к получаемой из граничных условий на контурах отверстий и трещин обобщенным методом наименьших квадратов переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований распределения напряжений в полуплоскости с круговым отверстием или трещиной с установлением закономерностей влияния геометрических характеристик отверстия и трещины, их взаиморасположения, а также упругих и пьезосвойств материалов на значения напряжений и их концентрацию.

1. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностран. лит., 1949. – 717 с.
2. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
3. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов и др. – М.: Изд-во «Академия Естествознания», 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток. – 2011. – 232 с.
6. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116.
7. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
10. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342.
11. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362.
12. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
13. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
14. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
15. Yamamoto Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
16. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
17. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Mater. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

М.А. Polianskii

Solution to the problem of electroelasticity for a half-plane with holes and cracks.

The electroelasticity problem for a piezohalfplane with internal elliptical holes and rectilinear cuts-fractures is solved. The problem is solved using complex potentials of the flat electroelasticity problem. Functions that are holomorphic outside the ellipses and cuts-fractures are represented by Laurent series, and functions that are holomorphic in the lower halfplanes are expressed using Cauchy-type integrals through functions obtained from functions that are holomorphic outside the holes and cuts, while satisfying the boundary conditions on the rectilinear boundary. Then, the determination of the unknown coefficients of the series from the boundary conditions on the contours of the holes and cuts by the generalized least squares method is reduced to solving an overdetermined

system of linear algebraic equations. The results of numerical studies for a half-plane with holes and cracks are described, and the patterns of changes in the electroelastic state of the half-plane are established, depending on its materials and the geometric characteristics of the holes and cracks.

Keywords: *electroelastic plate, half-plane, holes, complex potentials, Cauchy-type integrals, least squares method.*

*Статья поступила в редакцию 07.11.2025;
доработана 19.11.2025;
рекомендована к печати 26.11.2025.*