

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-121-132

EDN:MPPMRI



©2025. Е.С. Глушанков

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В КОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В работе представлено решение задачи определения термонапряженного состояния конечной многосвязной пластинки из анизотропного материала, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой, при действии сосредоточенных источников тепла. Решение задачи основано на использовании конформных отображений, комплексных потенциалов и метода наименьших квадратов. Численными исследованиями установлено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, характеристик конвективного теплообмена, а также распределения источников тепла на термонапряженное состояние пластинки.

Ключевые слова: многосвязная анизотропная пластинка, конвективный теплообмен, сосредоточенные источники тепла, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. В современной науке и технике в качестве элементов различных конструкций широко используются тонкие пластинки, изготовленные из анизотропных материалов. Эти пластинки могут содержать концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. Под действием тепловых или силовых полей в пластинках около концентраторов могут возникать значительные напряжения, что следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. На данный момент решено множество различных задач о влиянии тепловых полей на термонапряженное состояние изотропных и анизотропных упругих тел [1–5], в т.ч. находящихся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой [6–9], при действии сосредоточенных источников тепла [10].

В данной статье представлено решение задачи об определении термонапряженного состояния конечной многосвязной пластинки из анизотропного материала при действии в ее внутренних точках сосредоточенных источников тепла, когда на контурах отверстий имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Решение задачи построено с использованием конформных отображений, функций обобщенной комплексной переменной, метода наименьших квадратов.

¹ Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

С помощью проведенных численных исследований для пластинок в виде кругового диска и концентрического кольца установлены закономерности влияния геометрических характеристик пластинки, свойств материала пластинки, характеристик конвективного теплообмена и расположения сосредоточенных источников тепла на термонапряженное состояние пластинки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим конечную многосвязную пластинку из анизотропного материала, занимающую область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами произвольно расположенных эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1). Будем полагать, что внешний контур L_0 полностью лежит внутри формального эллиптического контура L_0^+ . Центры эллиптических контуров L_0^+ и L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) расположены в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$), полуоси этих контуров равны a_l и b_l , углы поворота – φ_l . На контурах пластинки имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами h_l с внешними средами, температуры которых равны \mathfrak{T}_l . Контур не подкреплён либо жестко подкреплён. Во внутренних точках пластинки $O_r^0(x_{0r}^0, y_{0r}^0)$ ($r = \overline{1, \mathcal{R}}$) действуют сосредоточенные источники тепла интенсивности q_r^0 .

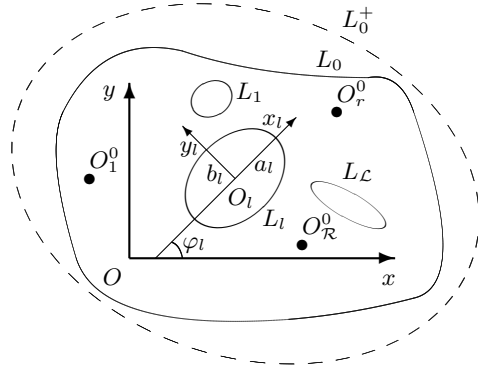


Рис. 1

Будем считать, что задача дана в несвязанной постановке. Тогда решение задачи термоупругости сводится к последовательному решению сперва задачи теплопроводности, а затем – собственно задачи термоупругости. Для решения указанных задач будем использовать теорию функций комплексной переменной.

В этом случае решение задачи теплопроводности сводится к определению комплексного потенциала теплопроводности $F_3(z_3)$ из граничных условий этой задачи. После определения функции $F_3(z_3)$ значения основных характеристик температурного поля (относительной температуры T , плотностей потока тепла q_x, q_y) в точках пластинки можно определять по формулам [4, 5]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \tag{1}$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa (\mu_3, -1) F_3'(z_3), \tag{2}$$

где $\kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$; μ_3 – корень характеристического уравнения теплопроводности [4, 5, 9]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \tag{3}$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки.

Решение задачи термоупругости сводится к определению комплексных потенциалов термоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) из граничных условий этой задачи.

После определения функций $\Phi_k(z_k)$ значения основных характеристик термонапряженного состояния (напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, перемещений u, v) в точках пластинки можно определять по формулам [4, 5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k), \quad (4)$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k). \quad (5)$$

Здесь μ_k ($k = \overline{1, 2}$) – корни характеристического уравнения теории упругости [4, 5, 9]

$$l_{4a}(\mu) = 0, \quad (6)$$

где

$$l_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22};$$

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 - a_{16}\mu_k + a_{12} + \frac{\delta_{k3}\alpha_1}{r_3};$$

$$q_k = a_{12}\mu_k - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_k} + \frac{\delta_{k3}\alpha_2}{r_3\mu_3};$$

$$r_3 = \frac{l_{2\alpha}(\mu_3)}{l_{4a}(\mu_3)};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_3) = -\alpha_1\mu_3^2 + \alpha_6\mu_3 - \alpha_2;$$

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3;$$

a_{ij} – коэффициенты деформации материала пластинки; α_i – коэффициенты линейного теплового расширения материала пластинки; δ_{ij} – символ Кронекера.

2. Построение комплексных потенциалов. Комплексные потенциалы $F_3(z_3), \Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) определены в многосвязных областях S_3, S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [4, 5, 9]

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad (7)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (8)$$

Для конечной области эти функции принимают вид [4, 5, 9]

$$F_3(z_3) = N_3(z_3) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} w_{3l}(z_3) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} c_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3); \quad (9)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (10)$$

Здесь

$$N_3(z_3) = \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} D_{3r}^0 w_{3r}^0(z_3);$$

$D_{3r}^0 = -q_r^0/4\pi\kappa$; $w_{3r}^0(z_3) = \ln(z_3 - z_{3r}^0)$; $z_{3r}^0 = x_{0r}^0 + \mu_3 y_{0r}^0$ – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) точкам O_r^0 ; D_{3l} – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $w_{3l}(z_3) = \ln(z_3 - z_{3l})$; z_{3l} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{3ln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности;

$$\varphi_{30n}(z_k) = (z_3 - z_{3l})/R_{3l}; \quad \varphi_{3ln}(z_3) = \zeta_{3l}^{-n} \quad (l = \overline{1, n});$$

ζ_{3l} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl}z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) w_{kr}^0(z_k);$$

$A_{kl}, B_{kl}, A_{kr}^0, B_{kr}^0$ – постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i A_{kl} = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i A_{3l},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i B_{kl} = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i B_{3l},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i A_{kr}^0 = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i A_{3r}^0,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i B_{kr}^0 = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i B_{3r}^0;$$

$A_{3l} = r_3 D_{3l}$; $B_{3l} = r_3(c_{3l1} R_{3l} - D_{3l} z_{3l})$; $A_{3r}^0 = r_3 D_{3r}^0$; $B_{3r}^0 = -r_3 D_{3r}^0 z_{3r}^0$; $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $w_{kr}^0(z_k) = \ln(z_k - z_{kr}^0)$; $z_{kr}^0 = x_{0r}^0 + \mu_3 y_{0r}^0$ – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) точкам O_r^0 ; a_{kln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоупругости;

$$\varphi_{k0n}(z_k) = (z_k - z_{kl})/R_{kl}; \quad \varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n} \quad (l = \overline{1, n});$$

ζ_{kl} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [4, 5, 9]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе Oxy координат –

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – угловой параметр уравнения эллипса.

Комплексные переменные ζ_{kl} ($k = \overline{1, 3}$) определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [4, 5, 9]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция $F_3(z_3)$ должна удовлетворять граничному условию [9]

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_3(\tau_3) + i\kappa \delta_{3,s}(\tau_3) F_3'(\tau_3)) = h_l \mathfrak{I}_l, \quad (12)$$

где τ_3 – точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (7); $\delta_{3,s}(\tau_3) = d\tau_3/ds$, s – дуга контура отверстия.

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоупругости [4, 5]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (d_{kl1}, d_{kl2}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) &= \left(\frac{df_{l1}}{ds}(\tau), \frac{df_{l2}}{ds}(\tau) \right) - \\ &- 2 \operatorname{Re} (d_{3l1}, d_{3l2}) \delta_{3,s}(\tau_3) r_3 F_3(\tau_3), \end{aligned} \quad (13)$$

где τ_k ($k = \overline{1, 2}$) – точки, получаемые из граничной точки при аффинных преобразованиях (8); τ – аффикс граничной точки; $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$. Для неподкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (1, \mu_k), \quad (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)) = (c_{l1}, c_{l2}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (p_k, q_k), \quad (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)) = (u_l(\tau), v_l(\tau));$$

c_{lj} – неизвестные постоянные интегрирования; $u_l(\tau), v_l(\tau)$ – заданные на границе значения перемещений.

3. Решение задачи для бесконечной многосвязной пластинки. В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные $c_3, D_{3l}, c_{3ln}, a_{kln}$, входящие в функции (9) и (10), можно определять из граничных условий

(12) и (13) с помощью метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_i ($i = \overline{1, \mathcal{L}}$) выбираем систему точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$), в которых следует минимизировать невязки граничных условий задач теплопроводности и термоупругости.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (9) в граничное условие (12) для определения неизвестных постоянных c_3 , D_{3l} , c_{3ln} получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_i c_3 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_i w_{3l}(\tau_{3im}) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) w'_{3l}(\tau_{3im})) D_{3l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} (h_i \varphi_{3ln}(\tau_{3im}) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) \varphi'_{3ln}(\tau_{3im})) c_{3ln} = \\ & = h_i \mathfrak{T}_l - 2 \operatorname{Re} (h_i N_3(\tau_{3im}) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) N'_3(\tau_{3im})) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\tau_{3im} = x_{im} + \mu_3 y_{im}$. После решения системы (14) с использованием метода сингулярных разложений [11] постоянные c_3 , D_{3l} , c_{3ln} , а, следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (9), будут известны. По известной функции (9) можно в любой точке пластинки определять значения основных характеристик температурного поля по формулам (1), (2) [4, 5, 9].

Задача термоупругости. При подстановке функций (9) и (10) в граничные условия (13) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = \\ & = \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\ & - 2 \operatorname{Re} d_{3ip} \delta_{3,s}(\tau_{3im}) r_3 F_3(\tau_{3im}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$, τ_{im} – аффикс точки M_{im} . После решения системы (15) с использованием метода сингулярных разложений [11] постоянные a_{kln} , а, следовательно, комплексные потенциалы термоупругости (10), будут известны. По известным функциям (10) можно в любой точке пластинки определять значения основных характеристик термонапряженного состояния по формулам (4), (5) [4, 5, 9].

4. Численные исследования. Были проведены численные исследования для пластинок из следующих материалов:

– стеклотекстолит КАСТ–В изотропный модифицированный (материал М1) [3, 9]:

$$a_{11} = 74,92a_0, \quad a_{22} = 74,92a_0, \quad a_{12} = -8,99a_0, \quad a_{66} = 167,79a_0,$$

$$\alpha_1 = 3,0\alpha_0, \quad \alpha_2 = 3,0\alpha_0, \quad k_{11} = 144,00k_0, \quad k_{22} = 144,00k_0.$$

– стеклопластик косоугольной намотки с наполнителем из алюмоборосиликатного стекла и связующим агентом из малеиновой эпоксидной смолы [3] модифицированный (материал М2) [9]:

$$a_{11} = 272,17a_0, \quad a_{22} = 1019,37a_0, \quad a_{12} = -76,15a_0, \quad a_{66} = 2548,42a_0, \\ \alpha_1 = 0,7\alpha_0, \quad \alpha_2 = 3,8\alpha_0, \quad k_{11} = 2,79k_0, \quad k_{22} = 1,21k_0.$$

Здесь

$$a_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad \alpha_0 = 10^{-5} \text{ К}^{-1}, \quad k_0 = 10^{-2} \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}.$$

При проведении расчетов количество членов в представляющих функции (9), (10) рядах и количество «коллокационных» точек M_{im} на контурах L_i увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого в решаемых задачах для случая материала М1, являющегося изотропным, необходимо было в рядах Лорана сохранять от 50 до 100 членов, на каждом из контуров брать от 700 до 1000 «коллокационных» точек, а для случая материала М2, обладающего сильной анизотропией, необходимо было в рядах сохранять от 70 до 150 членов, на каждом из контуров брать от 700 до 1500 «коллокационных» точек.

В таблице 1 для кругового диска из материала М1 радиуса r_0 ($a_0 = b_0 = r_0$), в которой на расстоянии d от центра действует один сосредоточенный источник тепла интенсивности q_1^0 , измеряемой в $\text{Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$ (рис. 2), когда через контур диска действует конвективный теплообмен с внешней средой относительной температуры $\mathfrak{T}_0 = 0 \text{ К}$ с коэффициентом теплообмена $h_0 = h$, приведены значения нормальных напряжений σ_s/q_1^0 в некоторых точках контура диска на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от hr_0 для некоторых значений d/r_0 .

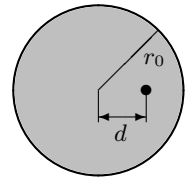


Рис. 2

В таблице 2 для аналогичных случаев приведены значения напряжений σ_s/q_1^0 для пластинки из материала М2, а в таблице 3 – для пластинки из материала М2 с поворотом осей анизотропии на угол $\pi/2$ рад. (обозначим через М2*).

В таблице 4 для концентрического кольца из материала М2* с внешним радиусом r_0 и внутренним радиусом r_1 ($a_0 = b_0 = r_0$, $a_1 = b_1 = r_1$), в котором на расстоянии d ($r_1 < d < r_0$) от центра кольца действует один сосредоточенный источник тепла интенсивности q_1^0 (рис. 3), когда через контуры кольца действует конвективный теплообмен с внешней средой относительной температуры $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_1 = 0 \text{ К}$ с коэффициентом теплообмена $h_0 = h_1 = h$, приведены значения нормальных напряжений σ_s/q_1^0 в некоторых точках внутреннего и внешнего контуров кольца для некоторых значений hr_0 , когда $r_1/r_0 = 0, 5$.

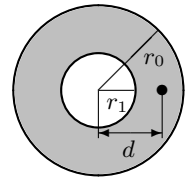


Рис. 3

Таблица 1. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура диска (материал М1)

θ , рад.	Значение d/r_0				
	0	0,2	0,4	0,6	0,8
0	0,022	0,032	0,043	0,057	0,072
$\pi/6$	0,022	0,029	0,033	0,028	0,011
$\pi/3$	0,022	0,024	0,021	0,012	0,003
$\pi/2$	0,022	0,020	0,013	0,007	0,002
$2\pi/3$	0,022	0,016	0,010	0,005	0,001
$5\pi/6$	0,022	0,015	0,008	0,004	0,001
π	0,022	0,014	0,008	0,004	0,001

Таблица 2. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура диска (материал М2)

hr_0	θ , рад.	Значение d/r_0				
		0	0,2	0,4	0,6	0,8
0,01	0	0,114	0,157	0,201	0,239	0,261
	$\pi/6$	0,100	0,128	0,135	0,103	0,023
	$\pi/3$	0,097	0,106	0,082	0,036	-0,003
	$\pi/2$	0,101	0,084	0,048	0,013	-0,008
	$2\pi/3$	0,097	0,067	0,033	0,004	-0,013
	$5\pi/6$	0,100	0,065	0,031	0,002	-0,018
	π	0,114	0,072	0,034	0,002	-0,021
0,1	0	0,123	0,168	0,215	0,262	0,298
	$\pi/6$	0,108	0,137	0,147	0,118	0,042
	$\pi/3$	0,104	0,114	0,091	0,046	0,009
	$\pi/2$	0,108	0,092	0,056	0,022	0,002
	$2\pi/3$	0,104	0,075	0,041	0,014	-0,002
	$5\pi/6$	0,108	0,074	0,040	0,012	-0,005
	π	0,123	0,081	0,044	0,014	-0,006
1	0	0,127	0,174	0,224	0,276	0,327
	$\pi/6$	0,112	0,141	0,152	0,124	0,048
	$\pi/3$	0,107	0,117	0,095	0,050	0,012
	$\pi/2$	0,110	0,094	0,058	0,025	0,005
	$2\pi/3$	0,107	0,078	0,044	0,017	0,001
	$5\pi/6$	0,112	0,077	0,044	0,017	0,001
	π	0,127	0,085	0,048	0,019	0,001
10	0	0,128	0,175	0,225	0,278	0,333
	$\pi/6$	0,113	0,142	0,153	0,125	0,049
	$\pi/3$	0,107	0,117	0,095	0,050	0,012
	$\pi/2$	0,111	0,094	0,059	0,025	0,005
	$2\pi/3$	0,107	0,078	0,044	0,017	0,002
	$5\pi/6$	0,113	0,078	0,044	0,017	0,001
	π	0,128	0,085	0,049	0,019	0,002
∞	0	0,128	0,175	0,225	0,279	0,334
	$\pi/6$	0,113	0,142	0,153	0,125	0,049
	$\pi/3$	0,107	0,117	0,095	0,050	0,012
	$\pi/2$	0,111	0,094	0,059	0,025	0,005
	$2\pi/3$	0,107	0,078	0,044	0,017	0,002
	$5\pi/6$	0,113	0,078	0,044	0,017	0,001
	π	0,128	0,085	0,049	0,020	0,002

Таблица 3. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура диска (материал М2*)

hr_0	θ , рад.	Значение d/r_0				
		0	0, 2	0, 4	0, 6	0, 8
0, 01	0	0, 101	0, 150	0, 223	0, 338	0, 539
	$\pi/6$	0, 097	0, 134	0, 172	0, 190	0, 136
	$\pi/3$	0, 100	0, 122	0, 121	0, 085	0, 046
	$\pi/2$	0, 114	0, 099	0, 069	0, 043	0, 026
	$2\pi/3$	0, 100	0, 073	0, 049	0, 031	0, 020
	$5\pi/6$	0, 097	0, 067	0, 044	0, 028	0, 018
	π	0, 101	0, 067	0, 043	0, 027	0, 017
0, 1	0	0, 108	0, 158	0, 230	0, 339	0, 517
	$\pi/6$	0, 104	0, 143	0, 180	0, 190	0, 119
	$\pi/3$	0, 108	0, 131	0, 126	0, 083	0, 034
	$\pi/2$	0, 123	0, 106	0, 072	0, 040	0, 018
	$2\pi/3$	0, 108	0, 078	0, 050	0, 028	0, 013
	$5\pi/6$	0, 104	0, 071	0, 045	0, 025	0, 011
	π	0, 108	0, 071	0, 044	0, 025	0, 011
1	0	0, 110	0, 162	0, 234	0, 340	0, 504
	$\pi/6$	0, 107	0, 147	0, 183	0, 190	0, 110
	$\pi/3$	0, 112	0, 135	0, 129	0, 082	0, 029
	$\pi/2$	0, 127	0, 109	0, 073	0, 038	0, 014
	$2\pi/3$	0, 112	0, 080	0, 050	0, 027	0, 010
	$5\pi/6$	0, 107	0, 072	0, 045	0, 024	0, 009
	π	0, 110	0, 072	0, 044	0, 023	0, 009
10	0	0, 111	0, 162	0, 235	0, 340	0, 501
	$\pi/6$	0, 107	0, 147	0, 184	0, 190	0, 109
	$\pi/3$	0, 113	0, 136	0, 129	0, 082	0, 029
	$\pi/2$	0, 128	0, 110	0, 073	0, 038	0, 014
	$2\pi/3$	0, 113	0, 080	0, 050	0, 026	0, 010
	$5\pi/6$	0, 107	0, 073	0, 045	0, 024	0, 009
	π	0, 111	0, 072	0, 044	0, 023	0, 009
∞	0	0, 111	0, 162	0, 235	0, 340	0, 501
	$\pi/6$	0, 107	0, 147	0, 184	0, 190	0, 109
	$\pi/3$	0, 113	0, 136	0, 130	0, 082	0, 029
	$\pi/2$	0, 128	0, 110	0, 073	0, 038	0, 014
	$2\pi/3$	0, 113	0, 081	0, 050	0, 026	0, 010
	$5\pi/6$	0, 107	0, 073	0, 045	0, 024	0, 009
	π	0, 111	0, 072	0, 044	0, 023	0, 009

Выводы. Из представленных данных видно, что в результате действия сосредоточенных источников тепла в пластинке могут возникать значительные концентрации напряжений. При этом, чем ближе источник тепла к контуру пластинки, тем более высокими оказываются значения напряжений около этого контура. В то же время, на значения напряжений в пластинке также влияют свойства ее материала и характеристики конвективного теплообмена с внешней средой.

Таблица 4. Значения σ_s/q_1^0 в точках контуров кольца (материал М2*)

hr_0	θ , рад.	Значение d/r_0							
		0,6	0,7	0,8	0,9	0,6	0,7	0,8	0,9
		Внутренний контур				Внешний контур			
0,01	0	0,545	0,404	0,243	0,100	0,203	0,320	0,472	0,676
	$\pi/6$	-0,219	-0,162	-0,106	-0,063	0,116	0,118	0,097	0,060
	$\pi/3$	-0,125	-0,096	-0,063	-0,038	0,083	0,062	0,041	0,026
	$\pi/2$	-0,047	-0,032	-0,016	-0,005	0,036	0,027	0,016	0,009
	$2\pi/3$	0,033	0,031	0,028	0,025	-0,017	-0,016	-0,015	-0,013
	$5\pi/6$	0,083	0,071	0,056	0,044	-0,040	-0,035	-0,028	-0,022
	π	0,189	0,158	0,121	0,091	-0,039	-0,033	-0,026	-0,021
0,1	0	0,653	0,489	0,305	0,139	0,152	0,279	0,432	0,619
	$\pi/6$	-0,123	-0,092	-0,052	-0,018	0,069	0,080	0,062	0,025
	$\pi/3$	-0,067	-0,053	-0,029	-0,010	0,046	0,035	0,019	0,006
	$\pi/2$	-0,031	-0,024	-0,012	-0,003	0,021	0,016	0,009	0,003
	$2\pi/3$	0,010	0,009	0,006	0,004	-0,006	-0,005	-0,004	-0,003
	$5\pi/6$	0,036	0,030	0,019	0,009	-0,017	-0,014	-0,009	-0,004
	π	0,089	0,073	0,045	0,020	-0,017	-0,014	-0,009	-0,004
10	0	0,680	0,510	0,310	0,123	0,119	0,259	0,412	0,578
	$\pi/6$	-0,065	-0,059	-0,035	-0,012	0,043	0,063	0,050	0,016
	$\pi/3$	-0,036	-0,035	-0,020	-0,006	0,024	0,022	0,012	0,003
	$\pi/2$	-0,017	-0,016	-0,009	-0,002	0,011	0,010	0,006	0,002
	$2\pi/3$	0,005	0,005	0,004	0,002	-0,003	-0,003	-0,002	-0,001
	$5\pi/6$	0,020	0,019	0,012	0,004	-0,009	-0,009	-0,006	-0,002
	π	0,048	0,047	0,029	0,010	-0,009	-0,009	-0,006	-0,002

Следует отметить, что когда коэффициент теплообмена $hr_i < 0,01$, то контур пластинки следует считать теплоизолированным (состояние 1), а когда $hr_i > 100$, то можно полагать, что на контуре пластинки задана температура, равная температуре внешней среды (состояние 2).

Установлено, что наименьшая концентрация напряжений в окрестности контура диска имеет место для случая, когда источник тепла находится в центре диска. При перемещении источника тепла к краю диска значения напряжений резко возрастают в области сближения, а в противоположной области наблюдается резкое снижение значений напряжений.

Численными исследованиями установлено, что значения напряжений в диске из изотропного материала М1 не зависят от значения коэффициента теплообмена, тогда как в дисках из анизотропных материалов М2 и М2* зависимость от значения коэффициента теплообмена является существенной. В пластинках из материалов М2 и М2* концентрация напряжений увеличивается с ростом значения hr_0 . Когда источник тепла близок к центру диска, то рост максимальных значений напряжений при переходе от состояния 1 к состоянию 2 составлял около 10%. При приближении источника тепла к краю диска рост максимальных значений напряжений становился более значительным в случае диска из мате-

риала М2 или же сменялся понижением значений напряжений в случае диска из материала М2*.

Концентрация напряжений в пластинках из материалов М2 и М2* значительно выше, чем в пластинке из материала М1. Это связано с тем, что значения коэффициентов теплопроводности у материалов М2 и М2* меньше, чем у материала М1. При этом, в диске из материала М2* наблюдаемая концентрация напряжений была выше, чем у материала М2. Это связано с тем, что перемещение источника тепла в диске из материала М2* осуществлялось в направлении, в котором у этого материала ниже значение коэффициента теплопроводности и выше значение коэффициента теплового расширения.

Добавление отверстий в пластинке приводит к существенному росту напряжений во всей пластинке. При этом, наибольшая концентрация напряжений возникает около контура, являющегося самым близким к источнику тепла. Из других данных следует, что уменьшение расстояния между контурами пластинки приводит к заметному росту концентрации напряжений в зоне между этими контурами и менее существенным изменениям вне этой зоны, причем чем меньше значения hr_i , тем более резким является рост концентрации напряжений.

Исследования проводились в ФГБОУВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Мотовиловец И.А.* Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 1).
2. *Подстригач Я.С.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
3. *Космодамианский А.С.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров // К.; Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
4. *Калоеров С.А.* Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.
5. *Калоеров С.А.* Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
6. *Parihar K.S.* Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
7. *Gaikwad K.R.* Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.
8. *Бондаренко Н.С.* Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае произвольного теплообмена / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2018. – № 1–2 (62–63). – С. 35–44.
9. *Глушанков Е.С.* Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 39–47. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-39-47. – EDN: FLТАНТ.
10. *Глушанков Е.С.* Действие сосредоточенных источников тепла в конечной многосвязной анизотропной пластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2025. – № 2 (91). – С. 52–63. – DOI: 10.24412/0136-4545-2025-2-52-63. – EDN: PJVLFЕ.

11. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

E.S. Glushankov

The concentrated heat sources' action in a finite multiply connected anisotropic plate under the convective heat transfer condition.

In the paper, a solution is presented for the problem of evaluation of thermo-stress state of finite multiply connected anisotropic plate being under convective heat transfer condition, acted with concentrated heat sources. Through the numerical studies, the effects of plates's geometric characteristics, the properties of its material, the characteristic of convective heat transfer, and the distribution of heat sources on the thermo-stress state of the plate were investigated.

Keywords: *multiply connected anisotropic plate, convective heat transfer, concentrated heat sources, thermal stresses, complex potentials.*

*Статья поступила в редакцию 06.11.2025;
доработана 19.11.2025;
рекомендована к печати 26.11.2025.*