

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-103-120

EDN:MBQYNV



©2025. А.И. Дзундза¹, В.А. Моисеенко², И.А. Моисеенко³,
Р.Н. Нескородев⁴

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПРОТЯЖЕННЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРАХ С МНОГОФАКТОРНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

В статье рассматривается задача о распространении осесимметричных упругих нормальных волн в протяженных функционально-градиентных изотропных цилиндрах концентрического кольцевого сечения. Построены базисные наборы аналитических частных решений для случаев волн крутильного и продольно-сдвигового типов. Изучены различные аспекты влияния радиальной неоднородности материала волновода на топологию дисперсионных спектров, фазовые и групповые скорости бегущих волн.

Ключевые слова: функционально-градиентный материал, многофакторная неоднородность, полый цилиндрический волновод, изотропия, нормальные волны, аналитические базисные

¹Дзундза Алла Ивановна – д-р пед. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: alladzundza@mail.ru.

Dzundza Alla Ivanovna – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Моисеенко Виктор Алексеевич – канд. физ.-мат. наук, доц. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА – филиал НИУ МГСУ, Макеевка, e-mail: v.a.moiseyenko@donnasa.ru.

Moiseyenko Viktor Alekseevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture – branch of the National Research Moscow State University of Civil Engineering, Makeyevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³Моисеенко Игорь Алексеевич – д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

Moiseyenko Igor Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

⁴Нескородев Роман Николаевич – д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: rromn72@mail.ru.

Neskorodev Roman Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

частные решения, дисперсионный спектр, фазовая скорость, групповая скорость.

Введение и цели исследования. Одним из подходов, обеспечившим построение базисных наборов аналитических частных решений дифференциальных уравнений волновой динамики в рамках пространственной модели динамического деформирования полых протяженных цилиндров из инновационных функционально-градиентных материалов, является задание специального вида функциональных законов изменения физико-механических характеристик материала волновода и привлечение аппарата рядов по обобщенной кольцевой координате. Так для единого экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности материала волновода построены в аналитическом виде базисные наборы частных решений уравнений модели для случаев изотропного [1], трансверсально-изотропного [2] и ортотропного [3] материалов. Используемый в данном подходе однофакторный функциональный закон неоднородности существенно сужает область применения полученных решений.

С целью устранения указанного недостатка в данном исследовании на базе предложенных многофакторных моделей функциональной радиальной неоднородности изотропного материала, свободных от ограничений на независимый вид функциональных законов изменения физико-механических характеристик материала волновода, построены базисные наборы аналитических частных решений уравнений математической модели для двух типов осесимметричных нормальных упругих волн, распространяющихся в протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения.

1. Постановка задачи. Рассматривается изотропный цилиндрический волновод, имеющий в поперечном сечении форму концентрического кругового кольца с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами. В нормированной параметром $R_* = (R_1 + R_2)/2$ безразмерной цилиндрической системе координат $Or\theta z$ волновод занимает область

$$V = \{r \in [1 - h, 1 + h], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\},$$

где $h = (R_2 - R_1)/(R_1 + R_2)$. Материал волновода считается функционально-неоднородным в радиальных направлениях

$$\lambda(r) = C_* \tilde{\lambda}(r), \quad \mu(r) = C_* \tilde{\mu}(r), \quad \rho(r) = \rho_* \tilde{\rho}(r).$$

Нормировочные параметры $C_* = const$ и $\rho_* = const$ имеют размерность соответственно упругих модулей Ламе и плотности. Полагается, что функциональные законы

$$\tilde{\lambda}(r) > 0, \quad \tilde{\mu}(r) > 0, \quad \tilde{\rho}(r) > 0 \quad (r \in [1 - h, 1 + h]) \quad (1)$$

являются произвольными в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик и относятся к классу $C^2(1 - h, 1 + h)$.

В рамках пространственной линейной математической модели волновой динамики независимому рассмотрению подлежат распространяющиеся вдоль оси

Оз с круговой частотой ω и нормированным параметром R_* продольным волновым числом k ($k \in \mathbb{C}$) два типа нормальных упругих осесимметричных волн – крутильного и продольно-сдвигового типов. С целью построения базисных наборов частных решений уравнений математической модели вводится замена переменных $r = \eta(x) = hx + 1$, где $x \in [-1, 1]$ – обобщенная кольцевая координата [4]. Соответственно далее используется система координат $Ox\theta z$. В новой системе координат соотношения (1) получают вид

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(x) > 0, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(x) > 0, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(x) > 0 \quad (x \in [-1, 1]). \quad (2)$$

В рамках рассматриваемых типов волновых движений допускается применение метода разделения переменных. Уравнения математических моделей для соответствующих типов волн в матрично-векторном виде получают следующий вид.

Математическая модель для случая волн *крутильного* типа:

$$\begin{aligned} u_\theta^{(TW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(x), \\ \Sigma^{(TW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma^{(TW)} \tilde{\Sigma}^{(TW)}(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma^{(TW)}(x, z, t) &= \left[\sigma_{\theta z}^{(TW)}(x, z, t), \sigma_{r\theta}^{(TW)}(x, z, t) \right]^T; \\ \tilde{\Sigma}^{(TW)}(x) &= \left[\tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(x) \right]^T; \end{aligned}$$

$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(x)$, $\tilde{\sigma}_s^{(TW)}(x)$ ($s = \theta z, r\theta$) – вещественные радиальные амплитудные составляющие соответствующих компонент волнового процесса; $\mathbf{P}_\Sigma^{(TW)}$ – квадратная диагональная матрица комплексной нормировки с элементами $\left[\mathbf{P}_\Sigma^{(TW)} \right]_{1,1} = i$, $\left[\mathbf{P}_\Sigma^{(TW)} \right]_{2,2} = 1$;

$$\tilde{\Sigma}^{(TW)}(x) = \tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(x) \cdot \tilde{u}_\theta^{(TW)}(x); \quad (4)$$

$\tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(x)$ – матричный дифференциальный оператор размерности 2×1 вида

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(x) = \left[k\tilde{\mu}(x) \quad \tilde{\mu}(x) \left(h^{-1}d_x - \eta(x)^{-1} \right) \right]^T.$$

Из уравнений движения получено обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\tilde{D}^{(TW)}(x) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(x) = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{(TW)}(x) &= d_x^2 + \tilde{f}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}^{(2)}(x), \\ \tilde{f}^{(1)}(x) &= \tilde{\mu}'(x) / \tilde{\mu}(x) + h\eta(x)^{-1}, \\ \tilde{f}^{(2)}(x) &= h^2 \left(\Omega^2 \rho(x) / \mu(x) - k^2 - \eta(x)^{-2} \right) - h\eta(x)^{-1} \mu'(x) / \mu(x), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$ – безразмерная приведенная частота.

Граничные условия для случая свободного волновода имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(\pm 1) = 0 \quad (7)$$

и для случая жестко закрепленного волновода – вид

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(\pm 1) = 0. \quad (8)$$

Математическая модель для случая волн *продольно-сдвигового* типа:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(LSW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x), \\ \mathbf{\Sigma}^{(LSW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(LSW)}(x), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(LSW)}(x, z, t) &= \left[u_r^{(LSW)}(x, z, t), u_z^{(LSW)}(x, z, t) \right]^T; \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) &= \left[\tilde{u}_r^{(LSW)}(x), \tilde{u}_z^{(LSW)}(x) \right]^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}^{(LSW)}(x, z, t) &= \left[\sigma_{rr}^{(LSW)}(x, z, t), \sigma_{\theta\theta}^{(LSW)}(x, z, t), \sigma_{zz}^{(LSW)}(x, z, t), \sigma_{rz}^{(LSW)}(x, z, t) \right]^T; \\ \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(LSW)}(x) &= \left[\tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(x) \right]; \end{aligned}$$

$\tilde{u}_s^{(LSW)}(x)$ ($s = r, z$), $\tilde{\sigma}_s^{(LSW)}(x)$ ($s = rr, \theta\theta, zz, rz$) – вещественные радиальные амплитудные составляющие соответствующих компонент волнового процесса; $\mathbf{P}_U^{(LSW)}$ и $\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)}$ – квадратные диагональные матрицы комплексной нормировки с элементами

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{P}_U^{(LSW)} \right]_{1,1} &= 1, \quad \left[\mathbf{P}_U^{(LSW)} \right]_{2,2} = i, \\ \left[\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \right]_{j,j} &= 1 \quad (j = \overline{1,3}), \quad \left[\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \right]_{4,4} = i; \\ \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(LSW)}(x) &= \tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x); \end{aligned} \quad (10)$$

$\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(x)$ – матричный дифференциальный оператор вида

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(x) = \begin{bmatrix} h^{-1} \left(\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x) \right) d_x + \eta(x)^{-1} \tilde{\lambda}(x) & -k \tilde{\lambda}(x) \\ h^{-1} \tilde{\lambda}(x) d_x + \eta(x)^{-1} \left(\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x) \right) & -k \tilde{\lambda}(x) \\ \tilde{\lambda}(x) \left(h^{-1} d_x + \eta(x)^{-1} \right) & -k \left(\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x) \right) \\ k \tilde{\mu}(x) & h^{-1} \tilde{\mu}(x) d_x \end{bmatrix}.$$

Из уравнений движения получена система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) = \mathbf{O}, \quad (11)$$

где $\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(x)$ – матричный дифференциальный оператор вида

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(x) = \begin{bmatrix} d_x^2 + \tilde{f}_{11}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}_{11}^{(2)}(x) & \tilde{f}_{12}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}_{12}^{(2)}(x) \\ \tilde{f}_{21}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}_{21}^{(2)}(x) & d_x^2 + \tilde{f}_{22}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}_{22}^{(2)}(x) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\tilde{f}_{11}^{(1)}(x) = h \eta(x)^{-1} + \frac{\tilde{\lambda}'(x) + 2\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)},$$

$$\tilde{f}_{11}^{(2)}(x) = -h^2 \eta(x)^{-2} + \frac{h^2 (\Omega^2 \tilde{\rho}(x) - k^2 \tilde{\mu}(x)) + h \eta(x)^{-1} \tilde{\lambda}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)},$$

$$\tilde{f}_{12}^{(1)}(x) = -h k \frac{\tilde{\lambda}(x) + \tilde{\mu}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \quad \tilde{f}_{12}^{(2)}(x) = -h k \frac{\tilde{\lambda}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)},$$

$$\tilde{f}_{21}^{(1)}(x) = h k \frac{\tilde{\lambda}(x) + \tilde{\mu}(x)}{\tilde{\mu}(x)}, \quad \tilde{f}_{21}^{(2)}(x) = h k \frac{h \eta(x)^{-1} (\tilde{\lambda}(x) + \tilde{\mu}(x)) + \tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)},$$

$$\tilde{f}_{22}^{(1)}(x) = h \eta(x)^{-1} + \frac{\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)}, \quad \tilde{f}_{22}^{(2)}(x) = h^2 \frac{\Omega^2 \tilde{\rho}(x) - k^2 (\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x))}{\tilde{\mu}(x)};$$

\mathbf{O} – нулевой вектор-столбец размерности 2.

Граничные условия для случая свободного волновода имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(\pm 1) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(\pm 1) = 0 \quad (13)$$

и для случая жестко закрепленного волновода – вид

$$\tilde{u}_r^{(LSW)}(\pm 1) = 0, \quad \tilde{u}_z^{(LSW)}(\pm 1) = 0. \quad (14)$$

2. Модели радиальной неоднородности. Вводятся в рассмотрение декартова система координат Oxy и комплексная переменная $\xi = x + iy$. Формально полагается, что оси Ox систем координат $Ox\theta z$ и Oxy совпадают. Вводятся произвольные функции $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 3}$), аналитические в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$). Для представленных математических моделей (3)–(8) и (9)–(14) законы радиальной неоднородности (2) через функции $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 3}$) допускают представление в рамках двух моделей неоднородности.

Аналитическая модель неоднородности применима в случае, когда функции $\tilde{\lambda}(x)$, $\tilde{\mu}(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$ допускают аналитическое продолжение в аналитические в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функции. Для математических моделей (3–8) и (9–14) соответственно получаются соотношения:

$$\psi_1(\xi) = \hat{\mu}(\xi), \quad \psi_2(\xi) = \hat{\rho}(\xi); \quad (15)$$

$$\psi_1(\xi) = \hat{\lambda}(\xi), \quad \psi_2(\xi) = \hat{\mu}(\xi), \quad \psi_3(\xi) = \hat{\rho}(\xi). \quad (16)$$

Тогда дифференциальные операторы $\tilde{D}^{(TW)}(x)$ и $\tilde{D}^{(LSW)}(x)$ допускают аналитическое продолжение в дифференциальные операторы $\hat{D}^{(TW)}(\xi)$ и $\hat{D}^{(LSW)}(\xi)$ с аналитическими в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функциональными коэффициентами соответственно $\tilde{f}^{(j)}(\xi)$ ($j = \overline{1, 2}$) и $\tilde{f}_m^{(j)}(\xi)$ ($j = \overline{1, 2}$; $m = 11, 12, 21, 22$) при выполнении достаточного условия несильной радиальной неоднородности, которое для математических моделей (3)–(8) и (9)–(14) соответственно записывается так:

$$\delta > 1, \quad \delta = \left| s_*^{(1)} \right|; \quad (17)$$

$$\delta > 1, \quad \delta = \min \left(\left| s_*^{(1)} \right|, \left| s_*^{(2)} \right| \right). \quad (18)$$

Здесь $s_*^{(1)}$ и $s_*^{(2)}$ – соответственно наименьшие по модулю нули функций $\hat{\mu}(\xi)$ и $\hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi)$.

Численная модель неоднородности предполагает специального вида полиномиальную аппроксимацию функциональных законов $\tilde{\lambda}(x)$, $\tilde{\mu}(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$. Для математической модели (3)–(8) вводятся представления

$$\psi_1(x) \approx \ln(\tilde{\mu}(x)), \quad \psi_2(x) \approx \tilde{\rho}(x)/\tilde{\mu}(x) \quad (x \in [-1, 1]), \quad (19)$$

а для математической модели (9)–(14) вводятся два альтернативных представления следующего вида:

$$\psi_1(x) \approx \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \quad \psi_2(x) \approx \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \quad \psi_3(x) \approx \ln(\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)) \quad (20-A)$$

$$(x \in [-1, 1]);$$

$$\psi_1(x) \approx \tilde{\lambda}(x)/\tilde{\mu}(x), \quad \psi_2(x) \approx \tilde{\rho}(x)/\tilde{\mu}(x), \quad \psi_3(x) \approx \ln(\tilde{\mu}(x)) \quad (20-B)$$

$$(x \in [-1, 1]).$$

Здесь

$$\psi_j(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (21)$$

Порядок N полиномов в соотношениях (21) определяется из условий

$$\max_{x \in [-1, 1]} \left| \tilde{\lambda}(x) - \tilde{\lambda}_*(x) \right| < \varepsilon, \quad \max_{x \in [-1, 1]} \left| \tilde{\mu}(x) - \tilde{\mu}_*(x) \right| < \varepsilon, \quad \max_{x \in [-1, 1]} \left| \tilde{\rho}(x) - \tilde{\rho}_*(x) \right| < \varepsilon,$$

где ε – погрешность задания исходных упруго-механических характеристик $\tilde{\lambda}(x)$, $\tilde{\mu}(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$; $\tilde{\lambda}_*(x)$, $\tilde{\mu}_*(x)$ и $\tilde{\rho}_*(x)$ – упруго-механические характеристики материала волновода для которых собственно и будут строиться базисные наборы частных решений. Соответственно соотношениям (19) записываются представления

$$\tilde{\mu}_*(x) = e^{\psi_1(x)}, \quad \tilde{\rho}_*(x) = \psi_2(x) e^{\psi_1(x)} \quad (x \in [-1, 1]), \quad (22)$$

а для альтернативных соотношений (20-А) и (20-Б) записываются соответствующие представления вида

$$\tilde{\lambda}_*(x) = (1 - 2\psi_1(x)) e^{\psi_3(x)}, \quad \tilde{\mu}_*(x) = \psi_1(x) e^{\psi_3(x)}, \quad \tilde{\rho}_*(x) = \psi_2(x) e^{\psi_3(x)} \quad (23-А)$$

$$(x \in [-1, 1]);$$

$$\tilde{\lambda}_*(x) = \psi_1(x) e^{\psi_3(x)}, \quad \tilde{\mu}_*(x) = e^{\psi_3(x)}, \quad \tilde{\rho}_*(x) = \psi_2(x) e^{\psi_3(x)} \quad (23-Б)$$

$$(x \in [-1, 1]).$$

Для математической модели (9)–(14) соответственно представлениям (23-А) и (23-Б) получены аналогичные соотношениям (18) достаточные условия несильной радиальной неоднородности альтернативного вида

$$\delta > 1, \quad \delta = |s_*|, \quad (24)$$

где s_* – наименьший по модулю нуль функции $\psi_1(\xi)$ (20-А), либо $\psi_1(\xi) + 2$ (20-Б). Для математической модели (3)–(8) дополнительных условий не требуется.

3. Базисные частные решения. В рамках представленных моделей неоднородности при выполнении сформулированных выше соответствующих достаточных условий несильной радиальной неоднородности дифференциальные уравнения (5) и (11) принимают такой вид:

$$\hat{D}^{(TW)}(\xi) \hat{u}_\theta^{(TW)}(\xi) = 0 \quad (|\xi| < \delta); \quad (25)$$

$$\hat{D}^{(LSW)}(\xi) \cdot \hat{U}^{(LSW)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta). \quad (26)$$

Известно, что уравнения (25) и (26) имеют аналитические в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) частные решения. С целью построения указанных решений используются разложения в окрестности точки $\xi = 0$ аналитических в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функций $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 3}$) вида

$$\psi_j(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (|\xi| < \delta). \quad (27)$$

Здесь $\{a_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ ($j = \overline{1, 3}$) – определяемые соотношениями (15) или (16) в случае аналитической модели неоднородности, либо соотношениями (19), (21) или (20-А), (20-Б), (21) в случае численной модели ($a_n^{(j)} = 0$, $j = \overline{1, 3}$; $n = \overline{N+1, \infty}$) наборы коэффициентов.

Случай крутильных волн. Базисный набор частных решений уравнения (25) включает два линейно независимых аналитических в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) частных решения, представленных в окрестности точки $\xi = 0$ разложениями вида

$$\hat{u}_\theta^{(TW, \text{particular}, q)}(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p^{(q)} \xi^p \quad (q = \overline{1, 2}), \quad (|\xi| < \delta), \quad (28)$$

где $\left\{d_p^{(q)}\right\}_{p=0}^{\infty}$ ($q = \overline{1, 2}$) – подлежащие определению наборы коэффициентов.

В результате подстановки разложений (27), (28) в дифференциальный оператор $\hat{D}^{(TW)}$ (ξ) дифференциальное уравнение (25) преобразуется в однородное функциональное уравнение $F(\xi) = 0$ ($|\xi| < \delta$) относительно аналитической в области $|\xi| < \delta$ функции $F(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \vartheta_p^{(q)} \xi^p$. Указанное функциональное уравнение порождает совокупность однородных алгебраических уравнений $\vartheta_p^{(q)} = 0$ ($p = \overline{0, \infty}$, $q = \overline{1, 2}$), из которых при $p = 0$, и $p = 1$ для двух частных решений (28) определяются начальные условия вида

$$\left\{d_0^{(1)} = 1, d_1^{(1)} = 0\right\}, \left\{d_0^{(2)} = 0, d_1^{(2)} = 1\right\}, \quad (29)$$

а при $p \geq 2$ с учетом формально дополняющих разложения (28) определений $d_m^{(q)} = 0$ ($q = \overline{1, 2}$; $m = \overline{-2, -1}$) получаются явные рекуррентные соотношения для определения искомых коэффициентов $d_p^{(q)}$ ($q = \overline{1, 2}$). В случае аналитической модели неоднородности (15) рекуррентные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} d_p^{(q)} = & \frac{1}{p(p-1)} \left(-h(p-1)(2p-3)d_{p-1}^{(q)} + h^2(k^2 - p^2 + 4p - 3)d_{p-2}^{(q)} + \right. \\ & + 2k^2h^3d_{p-3}^{(q)} + k^2h^4d_{p-4}^{(q)} - \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^4\Omega^2 b_{p-4-j}^{(1)} d_j^{(q)} \right) - \\ & - \sum_{j=0}^{p-3} \left(h^2 \left(2h\Omega^2 b_{p-3-j}^{(1)} + (j-1)b_{p-3-j}^{(2)} \right) d_j^{(q)} \right) - \\ & \left. - \sum_{j=0}^{p-2} \left(h \left(h\Omega^2 b_{p-2-j}^{(1)} + (2j-1)b_{p-2-j}^{(2)} \right) d_j^{(q)} \right) - \sum_{j=0}^{p-1} \left(j b_{p-1-j}^{(2)} d_j^{(q)} \right) \right) \\ & (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$\chi_1(\xi) = \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_1(\xi)}, \quad \chi_2(\xi) = \frac{\psi'_1(\xi)}{\psi_1(\xi)}.$$

Для численной модели неоднородности (19), (21) (22) рекуррентные соотноше-

ния записываются так:

$$\begin{aligned}
 d_p^{(q)} = & \frac{1}{p(p-1)} \left(-h(p-1)(2p-3)d_{p-1}^{(q)} + h^2(k^2 - p^2 + 4p-3)d_{p-2}^{(q)} + \right. \\
 & \left. + 2k^2h^3d_{p-3}^{(q)} + k^2h^4d_{p-4}^{(q)} - \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^4\Omega^2 a_{p-4-j}^{(2)} d_j^{(q)} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{j=0}^{p-3} \left(2h^3\Omega^2 a_{p-3-j}^{(2)} d_j^{(q)} \right) - \sum_{j=0}^{p-2} \left(h^2 \left(\Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} + (j-1)(p-j-2) a_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(q)} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{j=0}^{p-1} \left(\left(j(p-j) a_{p-j}^{(1)} + h(2j-1)(p-j-1) a_{p-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(q)} \right) \right) \\
 & (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 2}).
 \end{aligned} \quad (31)$$

Частные решения (28) позволяют определить базисное матричное решение уравнения (25) размерности 1×2 в таком виде

$$\hat{\mathbf{U}}^{(TW, \text{basic})}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{u}_\theta^{(TW, \text{particular}, 1)}(\xi) & \hat{u}_\theta^{(TW, \text{particular}, 2)}(\xi) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Случай волн продольно-сдвигового типа. Базисный набор аналитических в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) частных решений уравнения (26) включает четыре векторных линейно независимых частных решения

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{u}_r^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) \\ \hat{u}_z^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) \end{bmatrix} \quad (q = \overline{1, 4}). \quad (33)$$

Здесь

$$\hat{u}_s^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p^{(s, q)} \xi^p \quad (s = r, z; q = \overline{1, 4}), \quad (|\xi| < \delta), \quad (34)$$

$\left\{ d_p^{(s, q)} \right\}_{p=0}^{\infty}$ ($s = r, z; q = \overline{1, 4}$) – подлежащие определению наборы коэффициентов.

По аналогии со случаем крутильных волн, после подстановки разложений (27), (34) в дифференциальный оператор $\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi)$ дифференциальное уравнение (26) преобразуется в четыре независимые системы из двух однородных функциональных уравнений $F_s^{(q)}(\xi) = 0$ ($s = r, z; q = \overline{1, 4}$) ($|\xi| < \delta$) относительно аналитической в области $|\xi| < \delta$ функции $F_s^{(q)}(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \vartheta_p^{(s, q)} \xi^p$, из которых при $p = 0$, и $p = 1$ для четырех частных решений (33), (34) определяются на-

ЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ВИДА

$$\begin{aligned}
 & \left\{ d_0^{(r,1)} = 1, d_1^{(r,1)} = 0, d_0^{(z,1)} = 0, d_1^{(z,1)} = 0 \right\}, \\
 & \left\{ d_0^{(r,2)} = 0, d_1^{(r,2)} = 1, d_0^{(z,2)} = 0, d_1^{(z,2)} = 0 \right\}, \\
 & \left\{ d_0^{(r,3)} = 0, d_1^{(r,3)} = 0, d_0^{(z,3)} = 1, d_1^{(z,3)} = 0 \right\}, \\
 & \left\{ d_0^{(r,4)} = 0, d_1^{(r,4)} = 0, d_0^{(z,4)} = 0, d_1^{(z,4)} = 1 \right\},
 \end{aligned} \tag{35}$$

а при $p \geq 2$ получаются явные рекуррентные соотношения для определения искомых коэффициентов $d_p^{(s,q)}$ ($s = r, z$; $q = \overline{1,4}$). В случае аналитической модели неоднородности (16) рекуррентные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
 d_p^{(r,q)} &= \frac{1}{p(p-1)} \left(-2h(p-1)(p-2)d_{p-1}^{(r,q)} - h^2(p-2)(p-3)d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left(-h^4 \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(3)} - k^2 b_{p-4-j}^{(2)} \right) d_j^{(r,q)} - kh^3 b_{p-4-j}^{(7)} d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left(-h^2 \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(3)} - k^2 b_{p-3-j}^{(2)} \right) + (j+1)b_{p-3-j}^{(7)} + 2jb_{p-3-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. - kh^2 \left(hjb_{p-3-j}^{(1)} + hjb_{p-3-j}^{(2)} + 2b_{p-3-j}^{(7)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right. \tag{36} \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-2} \left(- \left(h^2 \left(\Omega^2 b_{p-2-j}^{(3)} + (-k^2 + 2j - 2)b_{p-2-j}^{(2)} + (j-1)b_{p-2-j}^{(1)} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + h \left((2j+1)b_{p-2-j}^{(7)} + 4jb_{p-2-j}^{(8)} \right) \right) d_j^{(r,q)} - hk \left(2hj \left(b_{p-2-j}^{(1)} + b_{p-2-j}^{(2)} \right) + b_{p-2-j}^{(7)} \right) d_j^{(z,q)} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \left(-j \left(h \left(b_{p-1-j}^{(1)} + 2b_{p-1-j}^{(2)} \right) + b_{p-1-j}^{(7)} + 2b_{p-1-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} + khj \left(b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right), \\
 d_p^{(z,q)} &= \frac{1}{p(p-1)} \left(-2h(p-1)(p-2)d_{p-1}^{(z,q)} - h^2(p-2)(p-3)d_{p-2}^{(z,q)} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left(-kh^3 b_{p-4-j}^{(9)} d_j^{(r,q)} - h^4 \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(6)} - k^2 \left(b_{p-4-j}^{(4)} + 2b_{p-4-j}^{(5)} \right) \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left(-kh^2 \left(h(j+1) \left(b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(5)} \right) + 2b_{p-3-j}^{(9)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - h^2 \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(6)} - k^2 \left(b_{p-3-j}^{(4)} + 2b_{p-3-j}^{(5)} \right) \right) + jb_{p-3-j}^{(9)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=0}^{p-2} \left(-hk \left(h(2j+1) \left(b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(5)} \right) + b_{p-2-j}^{(9)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\
 & - h \left(h\Omega^2 b_{p-2-j}^{(6)} - h \left(k^2 b_{p-2-j}^{(4)} + (2k^2 - j) b_{p-2-j}^{(5)} \right) + 2j b_{p-2-j}^{(9)} \right) d_j^{(z,q)} \left. + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \left(-j h k \left(b_{p-1-j}^{(4)} + b_{p-1-j}^{(5)} \right) d_j^{(r,q)} - j \left(h b_{p-1-j}^{(5)} + b_{p-1-j}^{(9)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) \\
 & \quad (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 4}).
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \chi_j(\xi) &= \frac{\psi_j(\xi)}{\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi)} \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \chi_{j+3}(\xi) = \frac{\psi_j(\xi)}{\psi_2(\xi)} \quad (j = \overline{1, 3}), \\
 \chi_{j+6}(\xi) &= \frac{\psi'_j(\xi)}{\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi)} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad \chi_9(\xi) = \frac{\psi'_2(\xi)}{\psi_2(\xi)}, \\
 \chi_j(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 9}), \quad (|\xi| < \delta).
 \end{aligned}$$

Для численной модели неоднородности (20-A), (21), (23-A) с учетом формально дополняющих разложения (34) определений $d_{-1}^{(s,q)} = 0$ ($s = r, z; q = \overline{1, 4}$), рекуррентные соотношения записываются так:

$$\begin{aligned}
 d_p^{(r,q)} &= \frac{1}{p(p-1)} \left(-h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(r,q)} - h^2(p-1)(p-3) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \\
 & + hk(p-1) d_{p-1}^{(z,q)} + kh^2 \left(2(p-2) d_{p-2}^{(z,q)} + h(p-3) d_{p-3}^{(z,q)} \right) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-4} \left(-h^4 \left(\Omega^2 a_{p-4-j}^{(2)} - k^2 a_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} - 2kh^3 g_{p-4-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) + \quad (37) \\
 & + \sum_{j=0}^{p-3} \left(-2h^2 \left(-g_{p-3-j}^{(1)} + h \left(\Omega^2 a_{p-3-j}^{(2)} - k^2 a_{p-3-j}^{(1)} \right) \right) d_j^{(r,q)} - kh^2 \left(4g_{p-3-j}^{(1)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + h \left((j-2p+6) a_{p-3-j}^{(1)} - (j-p+3) a_{p-3-j}^{(3)} \right) \right) d_j^{(z,q)} \right) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-2} \left(\left(-h^2 \left(\Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} - (k^2 + 2p - 2j - 4) a_{p-2-j}^{(1)} + (j+1)(p-j-2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2hg_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} + 2kh \left(-g_{p-2-j}^{(1)} + h(j-2p+4) a_{p-2-j}^{(1)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + h(p-j-2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=0}^{p-1} \left(\left(-j(p-j) a_{p-j}^{(3)} + h(-p+j+1) \left((2j+1) a_{p-1-j}^{(3)} - 2a_{p-1-j}^{(1)} \right) \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\
 & \quad \left. + hk \left((j-2p+2) a_{p-1-j}^{(1)} + (p-j-1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right), \\
 d_p^{(z,q)} & = \frac{1}{p(p-1)} \left(hk(p-1) d_{p-1}^{(r,q)} + h^2 k(2p-3) d_{p-2}^{(r,q)} - h^3 k(p-2) d_{p-3}^{(r,q)} - \right. \\
 & \quad \left. - h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(z,q)} - h^2(p-2)^2 d_{p-2}^{(z,q)} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left(-kh^3 b_{p-4-j}^{(3)} d_j^{(r,q)} - h^4 \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(2)} - k^2 b_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left(-kh^2 \left(h(p-j-3) a_{p-3-j}^{(3)} + h(j+1) b_{p-3-j}^{(1)} + 2b_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - h^2 \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(2)} - k^2 b_{p-3-j}^{(1)} \right) + j b_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-2} \left(\left(\left(-hk \left(h(2j+1) b_{p-2-j}^{(1)} + b_{p-2-j}^{(3)} \right) + 2kh^2(-p+j+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(h^2 j(-p+j+2) a_{p-2-j}^{(3)} - h \left(h \left(\Omega^2 b_{p-2-j}^{(2)} - k^2 b_{p-2-j}^{(1)} \right) + 2b_{p-2-j}^{(3)} \right) \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \left(\left(kh(-p+j+1) a_{p-1-j}^{(3)} - khj b_{p-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(-j(p-j) a_{p-j}^{(3)} - j b_{p-1-j}^{(3)} + 2hj(-p+j+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) \\
 & \quad (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 4}).
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\phi_1(\xi) = \psi_1(\xi) \psi'_3(\xi), \quad \chi_1(\xi) = \frac{1}{\psi_1(\xi)}, \quad \chi_2(\xi) = \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_1(\xi)}, \quad \chi_3(\xi) = \frac{\psi'_1(\xi)}{\psi_1(\xi)},$$

$$\phi_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(1)} \xi^n, \quad \chi_j(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (|\xi| < \delta).$$

Для модели неоднородности (20-Б), (21), (23-Б) рекуррентные соотношения имеют схожий вид.

Набор частных решений (33), (34) позволяет определить базисное матричное решение уравнения (26) размерности 2×4 такого вида

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{basic})}(\xi) = [\hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, 1)}(\xi) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, 4)}(\xi)]. \quad (38)$$

4. Общие решения. С использованием базисных решений (32) и (38) определяются общие решения уравнений (5) и (11) соответственно

$$\hat{u}_\theta^{(TW, general)}(x) = \left[\hat{\mathbf{U}}^{(TW, basic)}(x) \mathbf{A} \right]_{1,1}, \quad (39)$$

где \mathbf{A} – произвольный вектор-столбец размерности 2;

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW, general)}(x) = \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, basic)}(x) \mathbf{A}, \quad (40)$$

где \mathbf{A} – произвольный вектор-столбец размерности 4.

В случае крутильных волн рассматривается аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной ξ матричного оператора $\tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(x)$. Для рассмотренных моделей неоднородности с учетом представлений (15) и (22) соответственно получаются матричные операторы

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}^{(TW)}(\xi) &= \left[k\psi_1(\xi) \quad \psi_1(\xi) \left(h^{-1}d_\xi - \eta(\xi)^{-1} \right) \right]^T, \\ \hat{\mathbf{M}}^{(TW)}(\xi) &= \left[ke^{\psi_1(\xi)} \quad e^{\psi_1(\xi)} \left(h^{-1}d_\xi - \eta(\xi)^{-1} \right) \right]^T. \end{aligned}$$

Тогда можно записать

$$\tilde{\Sigma}^{(TW, general)}(x) = \left(\left(\hat{\mathbf{M}}^{(TW)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(TW, basic)}(\xi) \right) \mathbf{A} \right) \Big|_{\xi=x}. \quad (41)$$

Аналогично, в случае волн продольно-сдвигового типа рассматривается аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной ξ матричного оператора $\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(x)$. Для рассмотренных моделей неоднородности с учетом представлений (16), (23-А) и (23-Б) соответственно получаются матричные операторы

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) &= \begin{bmatrix} h^{-1}(\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi))d_\xi + \eta(\xi)^{-1}\psi_1(\xi) & -k\psi_1(\xi) \\ h^{-1}\psi_1(\xi)d_x + \eta(\xi)^{-1}(\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi)) & -k\psi_1(\xi) \\ \psi_1(\xi)(h^{-1}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}) & -k(\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi)) \\ k\psi_2(\xi) & h^{-1}\psi_2(\xi)d_\xi \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) &= \begin{bmatrix} h^{-1}e^{\psi_3(\xi)}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}(1 - 2\psi_1(\xi))e^{\psi_3(\xi)} & -k(1 - 2\psi_1(\xi))e^{\psi_3(\xi)} \\ h^{-1}(1 - 2\psi_1(\xi))e^{\psi_3(\xi)}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}e^{\psi_3(\xi)} & -k(1 - 2\psi_1(\xi))e^{\psi_3(\xi)} \\ (1 - 2\psi_1(\xi))e^{\psi_3(\xi)}(h^{-1}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}) & -ke^{\psi_3(\xi)} \\ k\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)} & h^{-1}\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)}d_\xi \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) &= \begin{bmatrix} h^{-1}(\psi_1(\xi) + 2)e^{\psi_3(\xi)}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)} & -k\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)} \\ h^{-1}\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}(\psi_1(\xi) + 2)e^{\psi_3(\xi)} & -k\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)} \\ \psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)}(h^{-1}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}) & -k(\psi_1(\xi) + 2)e^{\psi_3(\xi)} \\ ke^{\psi_3(\xi)} & h^{-1}e^{\psi_3(\xi)}d_\xi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда можно записать

$$\tilde{\Sigma}^{(LSW, general)}(x) = \left(\left(\hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, basic)}(\xi) \right) \mathbf{A} \right) \Big|_{\xi=x}. \quad (42)$$

5. Дисперсионные соотношения. Граничные условия (7), (8) и (13), (14) с использованием соотношений (39), (41) и (40), (42) соответственно определяют дисперсионные уравнения относительно безразмерного продольного волнового числа k и приведенной частоты Ω следующего вида

$$\Phi_{\Sigma}^{(TW)}(k, \Omega) = \det \left(\left[\begin{array}{c} \left(\left[\hat{\mathbf{M}}^{(TW)}(\xi) \right]_{1,1} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(TW, basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=-1} \\ \left(\left[\hat{\mathbf{M}}^{(TW)}(\xi) \right]_{1,1} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(TW, basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=1} \end{array} \right] \right) = 0, \quad (43)$$

$$\Phi_U^{(TW)}(k, \Omega) = \det \left(\left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{U}}^{(TW, basic)}(-1) \\ \hat{\mathbf{U}}^{(TW, basic)}(1) \end{array} \right] \right) = 0, \quad (44)$$

и

$$\Phi_{\Sigma}^{(LSW)}(k, \Omega) = \det \left(\left[\begin{array}{c} \left(\left[\hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \right]_{[1,4],[1,2]} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=-1} \\ \left(\left[\hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \right]_{[1,4],[1,2]} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=1} \end{array} \right] \right) = 0, \quad (45)$$

$$\Phi_U^{(LSW)}(k, \Omega) = \det \left(\left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, basic)}(-1) \\ \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, basic)}(1) \end{array} \right] \right) = 0. \quad (46)$$

6. Численный эксперимент. Анализ дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей бегущих волн продольно-сдвигового типа в свободном протяженном полем цилиндре ($h = 0.3$) проводился для случаев однородного материала

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}, \quad (47)$$

а также неоднородных материалов, функциональные законы радиальной неоднородности физико-механических характеристик которых были заданы так:

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)} (1 + 0.2 x^3), \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (48-A)$$

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)} (1 + 0.2 x^3), \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (48-B)$$

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)} (1 + 0.2 x^3). \quad (48-B)$$

Здесь использовались физико-механические характеристики алюминия

$$\tilde{\lambda}^{(Al)} = 5.91, \quad \tilde{\mu}^{(Al)} = 2.61, \quad \tilde{\rho}^{(Al)} = 2.7, \quad C_* = 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \rho_* = 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Выбор функциональных законов в соотношениях (48-A)–(48-B) был обусловлен задачей исследовать влияние на характеристики исследуемого волнового

процесса фактора неоднородности по каждой физико-механической характеристике изотропного материала отдельно. Далее волновод, задаваемый физико-механическими характеристиками (47), будет называться однородным, а характеристиками (48-А)–(48-В) – соответственно неоднородным волноводом А, Б, В.

Для неоднородных волноводов А–В были исследованы достаточные условия несильной радиальной неоднородности (18), (24) и погрешность аппроксимации в случае численной модели неоднородности. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Материал	Модели неоднородности		
	Аналитическая (16)	Численная (20-А), (21), (23-А) (N=4)	Численная (20-Б), (21), (23-Б) (N=4)
Однор.	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$
А	$\varepsilon = 0, \delta \approx 2.11$	$\varepsilon \approx 0.004, \delta \approx 1.98$	$\varepsilon = 0, \delta \approx 2.11$
Б	$\varepsilon = 0, \delta \approx 1.71$	$\varepsilon \approx 0.002, \delta \approx 1.95$	$\varepsilon \approx 0.007, \delta \approx 1.86$
В	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$

На основе представленной в таблице 1 информации, а также тестовой оценки временных затрат, для проведения численного эксперимента были выбраны случаи: однородный волновод – аналитическая модель; неоднородный волновод А – численная модель (20-Б), (21), (23-Б), (N = 4); неоднородный волновод Б – численная модель (20-А), (21), (23-А), (N = 4); неоднородный волновод В – аналитическая модель.

В области изменения параметров $k \in [0, 30]$ и $\Omega \in [0, 30]$ для однородного волновода и неоднородных волноводов А–В были построены фрагменты спектров бегущих волн продольно-сдвигового типа. Указанные спектры представлены соответственно на рисунках 1–3.

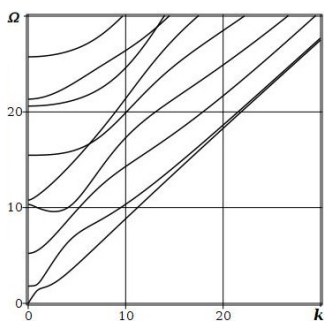


Рис. 1. Спектр однородного волновода

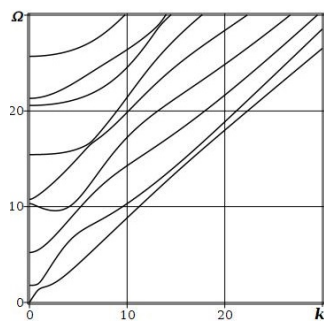


Рис. 2. Спектр неоднородного волновода Б

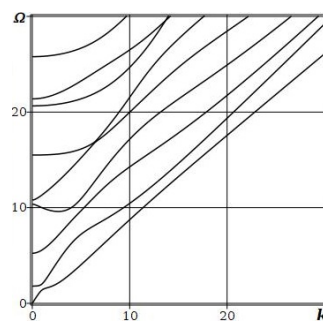


Рис. 3. Спектр неоднородного волновода В

Сравнение представленных фрагментов спектра позволяет сделать следующие выводы. Неоднородность только по упругому модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 2) и плот-

ности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 3) приводит к качественной перестройке спектральной картины для низших мод. При этом неоднородность только по упругому модулю $\tilde{\lambda}(x)$ не выявила видимых изменения спектра по сравнению с однородным волноводом. Следует также отметить характерную локализацию асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области первой моды по отношению к старшим модам спектра для неоднородных волноводов только по упругому модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 2) и плотности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 3).

С целью анализа количественных различий полученных фрагментов спектров использовалась функция сравнения парных по номеру в соответствующих спектрах мод

$$\Delta\Omega(k) = \left(\Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right). \quad (48)$$

На рисунках 4–6 представлены результаты сопоставительного анализа поведения низших пяти мод фрагментов спектров однородного и неоднородного волноводов А–В. Номера сопоставляемых мод спектров приведены в нижней части рисунков.

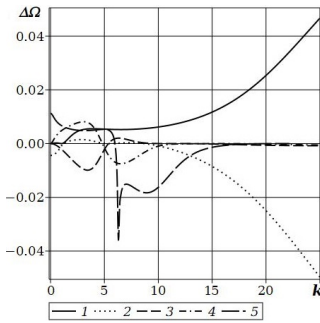


Рис. 4. Сопоставление парных мод спектров неоднородного А и однородного волноводов

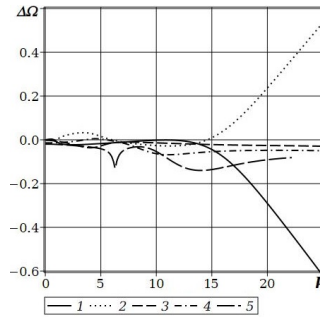


Рис. 5. Сопоставление парных мод спектров неоднородного Б и однородного волноводов

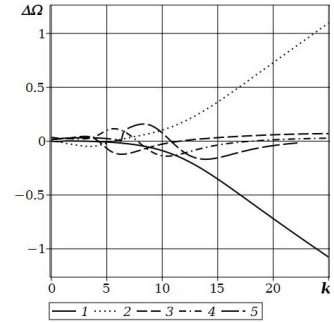


Рис. 6. Сопоставление парных мод спектров неоднородного В и однородного волноводов

Прежде всего следует отметить, что количественные значения функции $\Delta\Omega(k)$ при сопоставлении спектров однородного и неоднородного по модулю $\tilde{\lambda}(x)$ волновода (рис. 4) в абсолютных значениях оказались на порядок меньшими, чем значения указанной функции при сопоставлении однородного и неоднородных только по модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 5) и плотности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 6) волноводов. Наблюдается также ярко выраженная тенденция смещения в коротковолновой высокочастотной области первой моды в область более низких частот для неоднородных только по модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 5) и плотности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 6) волноводов по сравнению с однородным волноводом, а также тенденция смещения второй моды в область более высоких частот для указанных неоднородных волноводов по сравнению с однородным волноводом. При этом отмеченные тенденции поведения первых двух мод проявляются с точностью до наоборот для неоднородного

только по модулю $\tilde{\lambda}(x)$ волновода (рис. 4).

Для представленных на рисунках 1–3 фрагментов спектров построены графики фазовых (рис. 7–9) и для пяти нижних мод – групповых (рис. 10–12) скоростей. Приведенные на графиках фазовая c_p и групповая c_g скорости нормированы величиной $c_* = \sqrt{C_*/\rho_*}$.

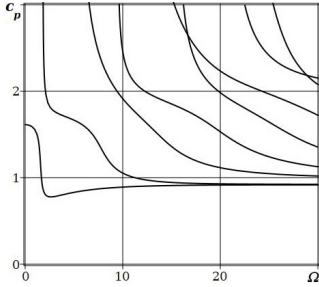


Рис. 7. Фазовые скорости волн в однородном волноводе

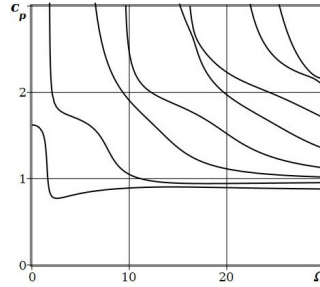


Рис. 8. Фазовые скорости волн в неоднородном В волноводе

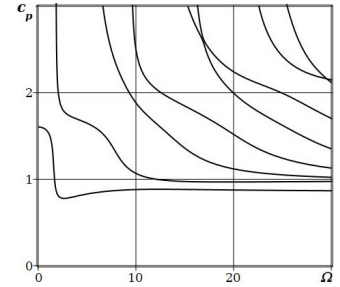


Рис. 9. Фазовые скорости волн в неоднородном В волноводе

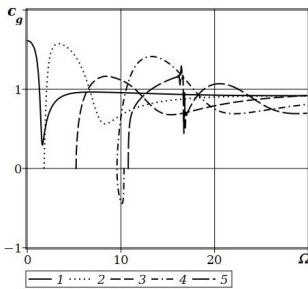


Рис. 10. Групповые скорости волн в однородном волноводе

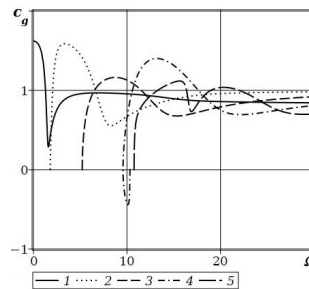


Рис. 11. Групповые скорости волн в неоднородном В волноводе

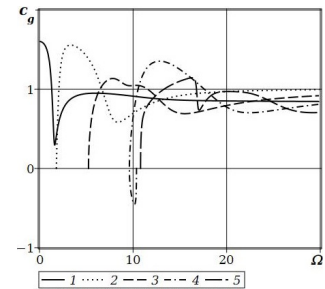


Рис. 12. Групповые скорости волн в неоднородном В волноводе

Представленные графики фазовых скоростей (рис. 7–9) иллюстрируют ранее отмеченную тенденцию локализации асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области первой моды по отношению к старшим модам спектра для неоднородных волноводов только по упругому модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 2) и плотности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 3). На графиках групповых скоростей (рис. 10–12) ярко выражен эффект обратной волны для четвертой моды спектров всех исследованных волноводов.

Заключение. Результатом представленных в статье исследований являются построенные на основе введенных моделей функциональной многофакторной радиальной неоднородности изотропного материала полого цилиндрического волновода аналитические базисные частные решения для двух случаев осесимметричных волновых процессов крутильного и продольно-сдвигового типов, а также полученные в процессе проведения численного эксперимента выводы

о влиянии неоднородности на топологию дисперсионных спектров, фазовые и групповые скорости бегущих нормальных волн продольно-сдвигового типа.

Исследования проводились в ФГБОУВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Моисеенко И.А. Волны деформаций в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого сечения / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 1 (66). – С. 31–53.
2. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 134–146.
3. Моисеенко И.А. Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко, С.А. Прийменко, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 27–41.
4. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре / Н.А. Шульга. // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 9. – С. 14–18.

A.I. Dzundza, V.A. Moiseyenko, I.A. Moiseyenko, R.N. Neskorohev

Axisymmetric normal waves in extended hollow cylinders with a multifactorial functional radial inhomogeneity of an isotropic material.

The article considers the problem of propagation of axisymmetric elastic normal waves in extended functionally-gradient isotropic cylinders of a concentric ring section. The basic sets of analytical partial solutions for the cases of torsional and longitudinal-shear types of waves are constructed. Various aspects of the influence of the radial inhomogeneity of the waveguide material on the topology of dispersion spectra, phase and group velocities of traveling waves are studied.

Keywords: *functional-gradient material, multifactor heterogeneity, hollow cylindrical waveguide, isotropy, normal waves, analytical basis partial solutions, dispersion spectrum, phase velocity, group velocity.*

*Статья поступила в редакцию 05.11.2025;
доработана 18.11.2025;
рекомендована к печати 26.11.2025.*