УДК 539.3:534.1
doi:10.24412/0136-4545-2025-3-93-102
EDN:HDTXNU

©2025. Д.С. Карасев[1], С.В. Сторожев[2], В.И. Сторожев[3]

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНО-СДВИГОВЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТЕЛАХ С МНОГОФАКТОРНОЙ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Представлена разработка аналитической методики построения базисных частных решений для системы уравнений распространения обобщенных поверхностных продольно-сдвиговых связанных электроупругих волн в полубесконечных функционально-градиентных пьезокерамических телах с описываемой двойными экспоненциальными функциями многофакторной приповерхностной неоднородностью, в результате применения которой решения исследуемых волновых уравнений получены в форме степенных рядов с коэффициентами, определяемыми из систем рекуррентных алгебраических соотношений.

Ключевые слова: *функционально-градиентное пьезокерамическое полупространство, двойной экспоненциальный закон неоднородности, продольно-сдвиговые электроупругие поверхностные волны, интегрирование системы волновых уравнений, базисные решения амплитудных уравнений, представления в степенных рядах.*

Актуальность и цель исследования. Анализ математических моделей дисперсионных, кинематических и энергетических свойств обобщенных поверхностных электроупругих волн в пьезоактивном полупространстве из новых модификаций неоднородных пористых, многокомпонентных и функционально-градиентных пьезоэлектрических материалов является современной актуальной научной проблемой как с точки зрения дополнения базы фундаментальных зна-

[1]*Карасев Дмитрий Сергеевич* – мл. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: vektor8899@ya.ru.

Karasev Dmitry Sergeevich – Junior Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

[2]*Сторожев Сергей Валериевич* – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

[3]*Сторожев Валерий Иванович* – доктор техн. наук, проф., гл. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

ний в механике сопряженных полей, так и ввиду востребованности инновационными высокотехнологичными приложениями, в том числе разработками в области проектирования компонентов акустоэлектронной техники, сенсорных устройств и датчиков измерительных приборов [1–5]. При наличии ряда альтернативных подходов к этой проблеме, включающих конечно-элементные и сеточные методы анализа соответствующих краевых задач динамической электроупругости, эффективными инструментами ее исследования остаются численно-аналитические методы, основывающееся на алгоритмах точного аналитического интегрирования систем дифференциальных уравнений волновой динамики пьезоактивных сред соответствующих типов и использования элементов множества получаемых базисных частных решений при построении дисперсионных соотношений для волн анализируемых типов. Так, для моделей распространения локализованных обобщенных поверхностных электроупругих волн сдвигового и продольно-сдвигового типа в функционально-градиентном трансверсально-изотропном пьезокерамическом полупространстве с однофакторной двойной экспоненциальной неоднородностью алгоритм аналитического интегрирования системы уравнений стационарной динамической электроупругости предложен в работах [6, 7]. Варианты алгоритмов интегрирования уравнений стационарной динамики для модели распространения сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с индивидуальным законом экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики материала и модели распространения продольно-сдвиговых электроупругих волн в слое из функционально-градиентной пьезокерамики с экспоненциальной неоднородностью общего вида представлены в работах [8, 9]. В контексте изложенного, целью настоящей работы является решение актуальной задачи разработки аналитической методики построения базисных частных решений для системы уравнений распространения обобщенных поверхностных продольно-сдвиговых связанных электроупругих волн в полубесконечных функционально-градиентных пьезокерамических телах с описываемой двойными экспоненциальными функциями многофакторной приповерхностной неоднородностью.

1. Постановка и алгоритм решения задачи. Рассматривается модель распространения связанных электроупругих обобщенных поверхностных волн продольно-сдвигового типа вдоль граничной поверхности пьезокерамического волновода в форме полупространства, занимающего область $V = \{\ x_3 \in [0,\ \infty),$ $(x_1, x_2) \in R^2\}$ в нормированных прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$. Пьезокерамический линейно-поляризованный функционально-градиентный материал полупространства относится к классу $6mm$ гексагональной системы, имеет ось поляризации Ox_3, обладает одноосной многофакторной приповерхностной неоднородностью и характеризуется переменными вдоль Ox_3 параметрами упругости $c_{ij}(x_3)$, плотности $\rho(x_3)$, пьезоэлектрическими $e_{ij}(x_3)$ и диэлектрическими $\varepsilon_{ij}(x_3)$ характеристиками вида

$$c_{ij} = c_{ij0} \exp(\lambda_{cij} \exp(-\beta_{cij} x_3)), \quad \rho = \rho_0 \exp(\lambda_\rho \exp(-\beta_\rho x_3)), \qquad (1)$$

$$e_{ij} = e_{ij0} \exp(\lambda_{eij} \exp(-\beta_{eij} x_3)),$$
$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij0} \exp(\lambda_{\varepsilon ij} \exp(-\beta_{\varepsilon ij} x_3)) \quad (\beta_{cij},\ \beta_\rho,\ \beta_{eij},\ \beta_{\varepsilon ij} \geq 0).$$

В случае задания без ограничения общности в качестве направления распространения исследуемых волн координатного направления Ox_1 и при введении в данном случае для комплексных функций динамических перемещений $u_j(x_1, x_3, t)$ и потенциала квазистатического электрического поля $\varphi(x_1, x_3, t)$ в рассматриваемых волнах представлений вида

$$u_1(x_1, x_3, t) = u_{10}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (2)$$
$$u_3(x_1, x_3, t) = u_{30}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)),$$
$$\varphi(x_1, x_3, t) = \varphi_0(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)),$$

с последующей подстановкой их в систему уравнений волнового деформирования пьезокерамики класса $6mm$

$$c_{11}(x_3)\partial_1^2 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{44}(x_3)\partial_3 u_1(x_1, x_3, t))+ \quad (3)$$
$$+c_{13}(x_3)\partial_1\partial_3 u_3(x_1, x_3, t)) + \partial_3(c_{44}(x_3)\partial_1 u_3(x_1, x_3, t))+$$
$$+e_{31}(x_3)\partial_1\partial_3\varphi(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{15}(x_3)\partial_1\varphi(x_1, x_3, t)) - \rho(x)\partial_t^2 u_3(x_1, x_3, t) = 0,$$
$$c_{44}(x_3)\partial_1\partial_3 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{13}(x_3)\partial_1 u_1(x_1, x_3, t))+$$
$$+c_{44}(x_3)\partial_1^2 u_3(x_1, x_3, t)) + \partial_3(c_{33}(x_3)\partial_3 u_3(x_1, x_3, t))+$$
$$+e_{15}(x_3)\partial_1^2\varphi(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{33}(x_3)\partial_3\varphi(x_1, x_3, t)) - \rho(x)\partial_t^2 u_3(x_1, x_3, t) = 0,$$
$$e_{15}(x_3)\partial_1\partial_3 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{31}(x_3)\partial_1 u_1(x_1, x_3, t))+$$
$$+e_{15}(x_3)\partial_1^2 u_3(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{33}(x_3)\partial_3 u_3(x_1, x_3, t))+$$
$$-\varepsilon_{11}(x_3)\partial_1^2\varphi(x_1, x_3, t) - \partial_3(\varepsilon_{33}(x_3)\partial_3\varphi(x_1, x_3, t)) = 0,\ \partial_j = \partial/\partial x_j,\ \partial_t = \partial/\partial t,$$

рассматриваемая задача сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно амплитудных составляющих $u_{10}(x_3)$, $u_{30}(x_3)$, $\varphi_0(x_3)$ в представлениях (2), имеющей вид

$$c_{440}\exp(\lambda_{c44}\exp(-\beta_{c44}x_3))u_{10}''(x_3) - c_{110}k^2\exp(\lambda_{c11}\exp(-\beta_{c11}x_3))u_{10}(x_3)+ \quad (4)$$
$$+(c_{130}\exp(\lambda_{c13}\exp(-\beta_{c13}x_3) + c_{440}\exp(\lambda_{c44}(-\beta_{c44}x_3)))iku_{30}'(x_3)+$$
$$+(e_{150}\exp(\lambda_{e15}\exp(-\beta_{e15}x_3)) + e_{310}\exp(\lambda_{e31}\exp(-\beta_{e31}x_3))ik\varphi_0'(x_3)+$$
$$+\rho_0\omega^2\exp(\lambda_\rho\exp(-\beta_\rho x_3))u_{10}(x_3)-$$
$$-c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}\exp(-\beta_{c44}x_3)\exp(\lambda_{c44}\exp(-\beta_{c44}x_3))(u_{10}'(x_3) + iku_{30}(x_3))-$$
$$-e_{150}\lambda_{e15}\beta_{e15}\exp(-\beta_{e15}x_3)ik\exp(\lambda_{e15}\exp(-\beta_{e15}x_3)))\varphi_0(x_3) = 0,$$

$$(c_{130}\exp(\lambda_{c13}\exp(-\beta_{c13}x_3)) + c_{440}\exp(\lambda_{c44}\exp(-\beta_{c44}x_3)))iku'_{10}(x_3)+$$
$$+c_{330}\exp(\lambda_{c33}\exp(-\beta_{c33}x_3))u''_{30}(x_3) - c_{440}\exp(\lambda_{c44}\exp(-\beta_{c44}x_3))k^2u_{30}(x_3)-$$
$$-e_{150}\exp(\lambda_{e15}\exp(-\beta_{e15}x_3))k^2\varphi_0(x_3) + e_{330}\exp(\lambda_{e33}\exp(-\beta_{e33}x_3)\varphi''_0(x_3)+$$
$$+\rho_0\omega^2\exp(\lambda_\rho\exp(-\beta_\rho x_3))u_{30}(x_3)-$$
$$-c_{130}\lambda_{c13}\beta_{c13}\exp(-\beta_{c13}x_3)ik\exp(\lambda_{c13}\exp(-\beta_{c13}x_3))u_{10}(x_3)-$$
$$-c_{330}\lambda_{c33}\beta_{c33}\exp(-\beta_{c33}x_3)\exp(\lambda_{c33}\exp(-\beta_{c33}x_3))u'_{30}(x_3)-$$
$$-e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e330}\exp(-\beta_{e33}x_3)\exp(\lambda_{e33}\exp(-\beta_{e33}x_3))\varphi'_0(x_3) = 0,$$
$$(e_{150}\exp(\lambda_{e15}\exp(-\beta_{e15}x_3)) + e_{310}\exp(\lambda_{e31}\exp(-\beta_{e31}x_3)))iku'_{10}(x_3)+$$
$$+e_{330}\exp(\lambda_{e33}\exp(-\beta_{e33}x_3))u''_{30}(x_3) - -e_{150}\exp(\lambda_{e15}\exp(-\beta_{e15}x_3))k^2u_{30}(x_3)+$$
$$+\varepsilon_{110}\exp(\lambda_{\varepsilon 11}\exp(-\beta_{\varepsilon 11}x_3)))k^2\varphi_0(x_3) - \varepsilon_{330}\exp(\lambda_{\varepsilon 33}\exp(-\beta_{\varepsilon 33}x_3)\varphi''_0(x_3)-$$
$$-e_{310}\lambda_{e31}\beta_{e31}\exp(-\beta_{e31}x_3)ik\exp(\lambda_{e31}\exp(-\beta_{e31}x_3))u_{10}(x_3)-$$
$$-e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\exp(-\beta_{e33}x_3)\exp(\lambda_{e33}\exp(-\beta_{e33}x_3))u'_{30}(x_3)+$$
$$+\varepsilon_{330}\lambda_{\varepsilon 33}\beta_{\varepsilon 33}\exp(-\beta_{\varepsilon 33}x_3)\exp(\lambda_{\varepsilon 33}\exp(-\beta_{\varepsilon 33}x_3))\varphi'_0(x_3) = 0.$$

2. Алгоритм аналитического интегрирования системы уравнений для амплитудных составляющих. Для входящих в уравнения (4) функций вводятся следующие представления в форме степенных рядов

$$u_{10}(x_3) = \tag{5}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n, u'_{10}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x_3^n, u''_{10}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x_3^n;$$
$$u_{30}(x_3) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_3^n, u'_{30}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x_3^n, u''_{30}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)b_{n+2}x_3^n;$$
$$\varphi_0(x_3) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_3^n, \varphi'_0(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}x_3^n, \varphi''_0(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)d_{n+2}x_3^n;$$
$$\exp(-\beta_{cij}x_3) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\beta_{cij})^m}{m!}x_3^m, \ldots, \exp(-\beta_{\varepsilon ij}x_3) = \sum_{nv=0}^{\infty}\frac{(-\beta_{\varepsilon ij})^m}{m!}x_3^m; \tag{6}$$
$$\exp(\lambda_{cij}\exp(-\beta_{cij}x_3)) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda_{cij}\exp(-\beta_{cij}x_3))^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_{cij}^m}{m!}\exp(-m\beta_{cij}x_3) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_{cij}^m}{m!}\frac{(m\beta_{cij})^q}{q!}x_3^q = \sum_{q=0}^{\infty}\Delta_{qcij}x_3^q, \quad \Delta_{qcij} = (-1)^q\frac{\beta_{cij}^q}{q!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^q\lambda_{cij}^m}{m!};\ldots;$$

$$\exp(\lambda_\rho \exp(-\beta_\rho x_3)) = \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\rho} x_3^q, \quad \Delta_{q\rho} = (-1)^q \frac{\beta_\rho^q}{q!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^q \lambda_\rho^m}{m!};$$

$$\exp(-\beta_{cij} x_3) \exp(\lambda_{cij} \exp(-\beta_{cij} x_3)) = \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qcij} x_3^q, \ \Omega_{qcij} = \sum_{m=0}^{q} \frac{(-\beta_{cij})^m}{m!} \Delta_{q-m,\, cij}; \ldots;$$

$$\exp(-\beta_{\varepsilon ij} x_3) \exp(\lambda_{\varepsilon ij} \exp(-\beta_{\varepsilon ij} x_3)) = \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{q\varepsilon ij} x_3^q, \ \Omega_{q\varepsilon ij} = \sum_{m=0}^{q} \frac{(-\beta_{\varepsilon ij})^m}{m!} \Delta_{q-m,\, \varepsilon ij}.$$

При подстановке соотношений (5)–(6) в систему уравнений (4) она принимает вид

$$c_{440} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x_3^n - c_{110} k^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc11} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n +$$

$$+ c_{130} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc13} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x_3^n + c_{440} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x_3^n +$$

$$+ e_{150} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc15} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} x_3^n + e_{310} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc31} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} x_3^n +$$

$$+ \rho_0 \omega^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\rho} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n - c_{440} \lambda_{c44} \beta_{c44} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x_3^n -$$

$$- c_{440} \lambda_{c44} \beta_{c44} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_3^n - e_{150} \lambda_{e15} \beta_{e15} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qe15} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_3^n = 0,$$

$$c_{130} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc13} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x_3^n + c_{440} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x_3^n +$$

$$+ c_{330} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc33} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) b_{n+2} x_3^n - c_{440} k^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_3^n -$$

$$- e_{150} k^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qe15} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_3^n + e_{330} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qe33} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) d_{n+2} x_3^n +$$

$$+ \rho_0 \omega^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\rho} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_3^n - c_{130} \lambda_{c13} \beta_{c13} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qc13} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n -$$

$$- c_{330} \lambda_{c33} \beta_{c33} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qc33} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x_3^n -$$

$$-e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\sum_{q=0}^{\infty}\Omega_{qe33}x_3^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}x_3^n=0,$$

$$e_{150}ik\sum_{q=0}^{\infty}\Delta_{qe15}x_3^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x_3^n+e_{310}ik\sum_{q=0}^{\infty}\Delta_{qe31}x_3^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x_3^n+$$

$$+e_{330}\sum_{q=0}^{\infty}\Delta_{qe33}x_3^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x_3^n-e_{150}k^2\sum_{q=0}^{\infty}\Delta_{qe15}x_3^q\sum_{n=0}^{\infty}b_nx_3^n+$$

$$+\varepsilon_{110}k^2\sum_{q=0}^{\infty}\Delta_{q\varepsilon11}x_3^q\sum_{n=0}^{\infty}d_nx_3^n-\varepsilon_{330}\sum_{q=0}^{\infty}\Delta_{q\varepsilon33}x_3^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)d_{n+2}x_3^n-$$

$$-e_{310}\lambda_{c31}\beta_{c31}ik\sum_{q=0}^{\infty}\Omega_{qe31}x_3^q\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_3^n-e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\sum_{q=0}^{\infty}\Omega_{qe33}x_3^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x_3^n+$$

$$+\varepsilon_{330}\lambda_{\varepsilon33}\beta_{\varepsilon33}\sum_{q=0}^{\infty}\Omega_{q\varepsilon33}x_3^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}x_3^n=0,$$

и после преобразований может быть записана в форме

$$\sum_{p=0}^{\infty}\Phi_p^{(1)}x_3^p=0,\quad \sum_{p=0}^{\infty}\Phi_p^{(2)}x_3^p=0,\quad \sum_{p=0}^{\infty}\Phi_p^{(3)}x_3^p=0, \tag{7}$$

где

$$\Phi_p^{(1)}=\sum_{n=0}^{p}((n+1)(n+2)c_{440}\Delta_{p-n,\,c44}a_{n+2}- \tag{8}$$

$$-(n+1)c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}\Omega_{p-n,\,c44}a_{n+1}+(\rho_0\omega^2\Delta_{p-n,\,\rho}-k^2c_{110}\Delta_{p-n,\,c11})a_n+$$

$$+ik(c_{130}\Delta_{p-n,\,c13}+c_{440}\Delta_{p-n,\,c44})(n+1)b_{n+1}-c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}ik\Omega_{p-n,\,c44}b_n+$$

$$+ik(e_{150}\Delta_{p-n,\,e15}+e_{310}\Delta_{p-n,\,e31})(n+1)d_{n+1}-e_{150}\lambda_{e15}\beta_{e15}ik\Omega_{p-n,\,e15}d_n),$$

$$\Phi_p^{(2)}=\sum_{n=0}^{p}(ik(c_{130}\Delta_{p-n,\,c13}+c_{440}\Delta_{p-n,\,c44})(n+1)a_{n+1}-$$

$$-c_{130}\lambda_{c13}\beta_{c13}ik\Omega_{p-n,\,c13}a_n+(n+1)(n+2)c_{330}\Delta_{p-n,\,c33}b_{n+2}-$$

$$-c_{330}\lambda_{c33}\beta_{c33}\Omega_{p-n,\,c33}(n+1)b_{n+1}+$$

$$+(\rho_0\omega^2\Delta_{p-n,\,\rho}-k^2c_{440}\Delta_{p-n,\,c44})b_n+(n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n,\,e33}d_{n+2}-$$

$$-e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n,\,e33}(n+1)d_{n+1}-e_{150}k^2\Delta_{p-n,\,e15}d_n,$$

$$\Phi_p^{(3)} = \sum_{n=0}^{p}((n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n,\,e33}a_{n+2}+$$

$$+ik(e_{310}\Delta_{p-n,\,e31}+e_{150}\Delta_{p-n,\,e15})(n+1)a_{n+1}-$$

$$-e_{310}\lambda_{e31}\beta_{c44}ik\Omega_{p-n,\,e31}a_n - e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n,\,e33}(n+1)b_{n+1}-$$

$$-k^2e_{150}\Delta_{p-n,\,e15}b_n-(n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n,\,e33}d_{n+2}+$$

$$+e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n,\,e33}(n+1)d_{n+1}+\varepsilon_{110}k^2\Delta_{p-n,\,\varepsilon11}d_n.$$

В результате приравнивания нулю являющихся коэффициентами степенных рядов величин $\Phi_p^{(1)}$, $\Phi_p^{(2)}$ и $\Phi_p^{(3)}$ в представлениях (8) с варьированием $p=\overline{0,\,\infty}$, для определения коэффициентов $a_n,\ \ b_n,\ \ d_n\ \ (n=\overline{0,\infty})$ формируется система рекуррентных соотношений,

$$(n+1)(n+2)c_{440}\Delta_{p-n,\,c44}a_{n+2}= \tag{9}$$

$$=(n+1)c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}\Omega_{p-n,\,c44}a_{n+1}-(\rho_0\omega^2\Delta_{p-n,\,\rho}-k^2c_{110}\Delta_{p-n,\,c11})a_n-$$

$$-ik(c_{130}\Delta_{p-n,\,c13}+c_{440}\Delta_{p-n,\,c44})(n+1)b_{n+1}+c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}ik\Omega_{p-n,\,c44}b_n-$$

$$-ik(e_{150}\Delta_{p-n,\,e15}+e_{310}\Delta_{p-n,\,e31})(n+1)d_{n+1}+e_{150}\lambda_{e15}\beta_{e15}ik\Omega_{p-n,\,e15}d_n,$$

$$(n+1)(n+2)c_{330}\Delta_{p-n,\,c33}b_{n+2}+(n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n,\,e33}d_{n+2}=$$

$$=-ik(c_{130}\Delta_{p-n,\,c13}+c_{440}\Delta_{p-n,\,c44})(n+1)a_{n+1}+c_{130}\lambda_{c13}\beta_{c13}ik\Omega_{p-n,\,c13}a_n+$$

$$+c_{330}\lambda_{c33}\beta_{c33}\Omega_{p-n,\,c33}(n+1)b_{n+1}--(\rho_0\omega^2\Delta_{p-n,\,\rho}-k^2c_{440}\Delta_{p-n,\,c44})b_n+$$

$$+e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n,\,e33}(n+1)d_{n+1}+e_{150}k^2\Delta_{p-n,\,e15}d_n,$$

$$(n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n,\,e33}a_{n+2}-(n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n,\,e33}d_{n+2}=$$

$$=-ik(e_{310}\Delta_{p-n,\,e31}+e_{150}\Delta_{p-n,\,e15})(n+1)a_{n+1}+e_{310}\lambda_{e31}\beta_{c44}ik\Omega_{p-n,\,e31}a_n+$$

$$+e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n,\,e33}(n+1)b_{n+1}+k^2e_{150}\Delta_{p-n,\,e15}b_n-$$

$$-e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n,\,e33}(n+1)d_{n+1}-\varepsilon_{110}k^2\Delta_{p-n,\,\varepsilon11}d_n,$$

позволяющая, в итоге, получить шесть базисных частных решений системы дифференциальных уравнений (4) с аналитическими представлениями в виде степенных рядов.

При $p=0$ формулы (9) принимают вид

$$2c_{440}\Delta_{p-n,\,c44}a_2=c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}\Omega_{0,\,c44}a_1-(\rho_0\omega^2\Delta_{0,\,\rho}-k^2c_{110}\Delta_{0,\,c11})a_0- \tag{10}$$

$$-ik(c_{130}\Delta_{0,\,c13}+c_{440}\Delta_{0,\,c44})b_1+c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}ik\Omega_{0,\,c44}b_0-$$

$$-ik(e_{150}\Delta_{0,\,e15}+e_{310}\Delta_{0,\,e31})d_1+e_{150}\lambda_{e15}\beta_{e15}ik\Omega_{0,\,e15}d_0,$$

$$2c_{330}\Delta_{0,\,c33}b_2+2e_{330}\Delta_{0,\,e33}d_2=-ik(c_{130}\Delta_{0,\,c13}+c_{440}\Delta_{0,\,c44})a_1+$$

$$+c_{130}\lambda_{c13}\beta_{c13}ik\Omega_{0,\,c13}a_0+c_{330}\lambda_{c33}\beta_{c33}\Omega_{0,\,c33}b_1-$$

$$-(\rho_0\omega^2\Delta_{0,\,\rho}-k^2c_{440}\Delta_{0,\,c44})b_0+e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n,\,e33}(n+1)d_{n+1}+e_{150}k^2\Delta_{0,\,e15}d_0,$$

$$2e_{330}\Delta_{0,\,e33}a_2-2e_{330}\Delta_{0,\,e33}d_2=-ik(e_{310}\Delta_{0,\,e31}+e_{150}\Delta_{0,\,e15})(n+1)a_1+$$

$$+e_{310}\lambda_{e31}\beta_{c44}ik\Omega_{0,\,e31}a_0++e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{0,\,e33}b_1+k^2e_{150}\Delta_{0,\,e15}b_0-$$

$$-e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{0,\,e33}d_1-\varepsilon_{110}k^2\Delta_{0,\,\varepsilon11}d_0,$$

и позволяют выразить коэффициенты a_2, b_2, d_2 через произвольные величины a_1, b_1, d_1, a_0, b_0, d_0. Для формирования шести базисных решений $u_{10j}(x_3,\omega,k)$, $u_{30j}(x_3,\omega,k)$, $\varphi_{0j}(x_3,\omega,k)$ $(j=\overline{1,6})$ системы (8) предлагается задание совокупностей $\{a_1,\,b_1,\,d_1,\,a_0,\,b_0,\,d_0\}$ в виде $\{0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,1\}$, $\{0,\,0,\,0,\,0,\,1,\,0\}$, $\{0,\,0,\,0,\,1,\,0,\,0\}$, $\{0,\,0,\,1,\,0,\,0,\,0\}$, $\{0,\,1,\,0,\,0,\,0,\,0\}$, $\{1,\,0,\,0,\,0,\,0,\,0\}$, на основе которого определяются шесть последовательностей значений $\{a_n^{(j)},\ b_n^{(j)},\ d_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ $(j=\overline{1,\ 6})$ и записываются аналитические представления шести базисных решений системы уравнений (4) в форме степенных рядов

$$u_{10j}(x_3,\omega,k)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}x_3^n, \tag{11}$$

$$u_{30j}(x_3,\omega,k)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(j)}x_3^n,\quad \varphi_{0j}(x_3,\omega,k)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n^{(j)}x_3^n\ \ (j=\overline{1,\ 6}).$$

Этапами дальнейшего использования построенных базисных решений для расчетного анализа дисперсионных спектров, кинематических, силовых и энергетических свойств обобщенных поверхностных электроупругих волн рэлеевского типа является суммирование их редуцированных представлений на задаваемом уровне точности и формирование трех их комбинаций, удовлетворяющих условиям убывания интенсивности характеристик рассматриваемых волн в глубине полупространства.

Заключение. В результате представленных в работе исследований согласно сформулированным целям разработан численно-аналитический алгоритм построения базисных частных решений для систем амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение обобщенных продольно-сдвиговых поверхностных электроупругих волн рэлеевского типа вдоль произвольного направления в граничной плоскости полупространства функционально-градиентной пьезокерамики класса 6mm с перпендикулярной граничной плоскости осью поляризации и произвольной многофакторной локализованной приповерхностной неоднородностью, описываемой отдельными разнотипными зависимостями в виде двойных экспоненциальных функций для каждой из физико-механических характеристик рассматриваемого материала.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 27.02.2025 № 075-02-2025-1608).

1. *Setter N.* Piezoelectric material and devices / N. Setter. – Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 2002. – 518 p.
2. *Heywang W.* Piezoelectricity, evolution and future of a technology / W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing. – Berlin: Springer, 2008. – 581 p.
3. *Uchino K.* Advanced Piezoelectric Materials / K. Uchino. – Cambridge: Woodhead Publishing, 2011. – 696 p.
4. Акустоэлектронные устройства обработки и генерации сигналов. Принципы работы, расчета и проектирования / О.Л. Балышева [и др.]; под ред. Ю.В. Гуляева. – М.: Радиотехника, 2012. – 571 с.
5. *Tanaka S.* Piezoelectric acoustic wave devices based on heterogeneous integration technology / S. Tanaka // Proceedings 2014 IEEE International Frequency Control Symposium (FCS) (Taipei, Taiwan). – 2014. – P. 1–4. – DOI 10.1109/FCS.2014.6859994.
6. *Карасев Д.С.* Интегрирование уравнений распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентной пьезокерамике с двойной экспоненциальной неоднородностью / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 48–55. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55. – EDN: SPYOBC.
7. *Карасев Д.С.* Интегрирование уравнений распространения локализованных электроупругих волн релеевского типа в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики с двойной экспоненциальной неоднородностью / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3 (84). – С. 36–43. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-3-36-43. – EDN: IVOJVW.
8. *Карасев Д.С.* Сдвиговые электроупругие волны в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с индивидуальным законом экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики материала / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 3 (88). – С. 35–43. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-3-35-43. – EDN: VGCFAS.
9. *Сторожев В.И.* Интегрирование системы уравнений модели распространения продольно-сдвиговых электроупругих волн в слое из функционально-градиентной пьезокерамики с экспоненциальной неоднородностью общего вида / В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 4 (89). – С. 64–73. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-4-64-73. – EDN: IOLPYA.

D.S. Karasev, S.V. Storozhev, V.I. Storozhev

Analytical method for constructing basic partial solutions for the system of equations of propagation of longitudinal-shear electroelastic waves in semi-infinite bodies with multifactor near-surface heterogeneity.

This paper presents the development of an analytical technique for constructing basic partial solutions for a system of equations describing the propagation of generalized surface longitudinal-shear coupled electroelastic waves in semi-infinite functionally graded piezoceramic bodies with multifactorial near-surface inhomogeneity described by double exponential functions. As a result of its application, solutions to the wave equations under study are obtained in the form of power series with coefficients determined from systems of recurrence algebraic relations.

Keywords: *functionally graded piezoceramic half-space, double exponential law of inhomogeneity, longitudinal-shear electroelastic surface waves, integration of a system of wave equations, basic solutions to amplitude equations, power series representations.*

Статья поступила в редакцию 31.10.2025;
доработана 17.11.2025;
рекомендована к печати 26.11.2025.