

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-82-92

EDN:KBVMGKZ

©2025. О.В. Явруян¹

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ И ГЕОМЕТРИИ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Проведено исследование оптимизационной задачи о максимизации первой собственной частоты для простейших элементов конструкций – балки и пластинки. В качестве управляющих функций выступают механические упругие свойства и геометрические характеристики, которые представляют собой функции одной переменной. Построены соотношения Релея, полученные условия оптимальности. Исследованы модельные задачи об изгибных колебаниях неоднородных упругих балки круглого поперечного сечения и круглой пластинки. Определены оптимальные распределения площади поперечного сечения (толщины пластинки) и модуля Юнга в классе полиномов с учетом их свойств положительности, ограничений на среднее распределение, а также с учетом ограничений сверху и снизу на значения соответствующих функций. Оптимизационные задачи решены с привлечением генетических алгоритмов и проекционного метода Галеркина. Приведены результаты расчетов и сравнительный анализ с однородным случаем.

Ключевые слова: балка, круглая пластинка, неоднородность, оптимизация геометрии и свойств, первая собственная частота, метод Галеркина, генетический алгоритм.

Введение. Задачи оптимального проектирования элементов конструкций являются предметом исследования уже не один десяток лет. Определение оптимальных параметров простейших элементов (балок, пластин) позволяет на этапе проектирования повысить эксплуатационные способности объекта при сохранении/уменьшении веса конструкции. Правильный подбор и оптимизация свойств элементов конструкции (например, прочности, жесткости/податливости, устойчивости) обеспечивают надежность и продолжительный срок эксплуатации изделий, что особенно важно для конструкций ответственного назначения.

На первых этапах решения оптимизационных задач в качестве управляющих параметров выступали геометрические характеристики объектов исследования (толщина, площадь поперечного сечения и др.) [1–6]. В дальнейшем, с появлением новых современных материалов и технологий создания композитных и

¹Явруян Оксана Вячеславовна – доктор физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости инст-та математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону; вед. науч. сотр. отдела дифференц. уравнений Южного математического инст-та – филиала ВНИИ РАН, Владикавказ, e-mail: yavruyan@mail.ru.

Yavruyan Oksana Vyacheslavovna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich, Department of Theory of Elasticity; Leading Researcher, Southern Mathematical Institute, a Branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Department of Differential Equations.

функционально-градиентных материалов приобретает актуальность задача оптимального проектирования механических свойств объектов [7–8]. Например, оптимизация механических свойств балок и пластин с целью максимизации первой собственной частоты, повышения устойчивости при максимизации внешней силы, увеличение прочностных характеристик при уменьшении массы объекта, что особенно важно в авиационной, приборостроительной и биоинженерии.

Современные технологии аддитивного производства открыли широкие возможности топологической оптимизации. Этот класс оптимизационных задач занимает по праву особое место в классе задач оптимизации свойств материалов. Топологическая оптимизация предполагает оптимальное распределение массы с целью улучшения прочностных механических свойств (жесткость, устойчивость) [9–13]. При этом стоит отметить, что аналитические методы исследования в задачах топологической оптимизации уступают место численным расчетам с использованием конечно-элементных пакетов и эвристических алгоритмов для определения оптимальных параметров. Связано это, в первую очередь, со сложной геометрией объекта, которая получается в результате топологической оптимизации.

Однако в некоторых случаях удается построить аналитическое оптимальное решение на основе условий оптимальности, полученных на базе вариационных принципов. Так, в работах [14–17] рассмотрены задачи оптимизации первой собственной частоты при управлении механическими упругими, вязкоупругими и термоупругими свойствами простейших элементов конструкций.

Особый интерес представляют задачи оптимизации пористых стержней и пластин, которые имеют непосредственное применение в биомеханике при изготовлении и моделировании медицинских протезов и заместительных биоэлементов. Основные модели пороупругости – это модель Био с заполненными порами, модель Ковина с пустыми порами. Возможные постановки оптимизационных задач для пороупругих материалов варьируются от оптимизации пористости, до подбора оптимальных геометрических параметров элементов конструкций. Так, в работе [18] осуществлена многокритериальная оптимизация распределения углеродных нанотрубок по толщине в функционально-градиентных пористых балках. В работах [19–20] рассмотрены различные постановки оптимизационных задач для пороупругих балок в рамках модели Тимошенко, рассмотрены спектральная оптимизационная задача [15] в случае, когда пористость меняется по толщине балки, а также многокритериальная оптимизационная задача, связанная с максимизацией критической нагрузки при потере устойчивости и одновременной минимизацией массы пористой балки в случае, когда пористость меняется в двух направлениях [18].

Стоит также отметить, что для простейших элементов конструкций характер неоднородности должен иметь достаточно простой закон изменения по координатам, обеспечивающий эффективное управление технологическими процессами при изготовлении соответствующих элементов конструкций. Это приводит к новым формулировкам задач оптимального проектирования свойств материалов

на конечномерных множествах простой структуры, например, среди полиномиальных, экспоненциальных, кусочно-постоянных и кусочно-линейных функций.

В рамках представленной работы проведено исследование спектральной оптимизационной задачи о максимизации первой собственной частоты неоднородной функционально-градиентной по длине балки с переменной площадью поперечного сечения, а также для неоднородной пластинки с переменными механическими свойствами и толщиной. Проведена одновременная оптимизация по двум управляющим функциям – переменному радиусу (толщине) и переменному модулю Юнга.

1. Постановка спектральной оптимизационной задачи для произвольного упругого неоднородного тела. Спектральная оптимизационная задача состоит в оптимизации спектральных характеристик упругого тела, находящегося в состоянии установившихся вынужденных или свободных колебаний. В рамках данного исследования рассмотрены свободные колебания упругого неоднородного тела, занимающего объем V с границей S . Уравнения колебаний, определяющие соотношения и граничные условия имеют вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}; \quad (2)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = 0, \quad (3)$$

где C_{ijkl} , n_j – компоненты тензора упругих модулей и компоненты вектора внешней нормали к поверхности. Ограничимся рассмотрением случая изотропного тела, допускающего описание механических свойств двумя характеристиками, например, модулем Юнга $E(x)$ и коэффициентом Пуассона ν . В данном исследовании будем полагать $\nu = const$.

Спектральная оптимизационная задача состоит в максимизации первой резонансной частоты. В качестве управляющих функций выступают геометрия области и механические характеристики среды. На управляющие функции $f_i(x)$, $i = 1..n$ наложены дополнительные условия в виде ограничения сверху и снизу (4), либо ограничения на среднее значение вида (5)

$$f_{i \min} < f_i(x) < f_{i \max}; \quad (4)$$

$$\int_V f_i dV = f_{0i}, \quad i = 1..n. \quad (5)$$

Составим соотношение Релея для нахождения первой собственной частоты для произвольного упругого тела. Для этого умножим каждое из уравнений (1) на соответствующую функцию u_i и проинтегрируем по области V

$$k^2 = \frac{\int_V \sigma_{mj,j} u_m dV}{\int_V \rho u_m^2 dV} = \frac{\int_V C_{mjrl} u_{r,l} u_{m,j} dV}{\int_V \rho u_m^2 dV} \rightarrow \min_{f_i}. \quad (6)$$

Для решения оптимизационной задачи построим общий функционал, учитывающий дополнительное условие вида (5), согласно методу произвольных множителей Лагранжа (λ_i):

$$J[f_1, \dots, f_n] = \frac{\int_V C_{mjrl} u_{r,l} u_{m,j} dV}{\int_V \rho u_m^2 dV} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\int_V f_i(x) dx - f_{0i} \right). \quad (7)$$

Оптимальное решение определяется из основного вариационного принципа и достигается на функциях, удовлетворяющих условию

$$\delta J[f_i] = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим модельные задачи для неоднородных элементов – балки переменного поперечного сечения и круглой пластинки переменной толщины. Основное внимание будет уделено поиску решения в классе полиномов, поскольку при изготовлении элементов конструкции из функционально-градиентных материалов (ФГМ) полиномиальное распределение представляется наиболее возможным.

Стоит также отметить, что ряд модельных задач в случае неоднородных балок и пластин с постоянными геометрическими характеристиками были рассмотрены ранее в работах [14, 20], и в зависимости от способов закрепления имеют аналитическое решение. Однако для получения аналитического решения приходится накладывать определенные ограничения на поведение управляющих функций на конце стержня, либо на краю круглой пластинки, в частности, обращение их в ноль, что, вообще говоря, является не совсем физичным. В данном исследовании рассматривается более обобщенная и практически реализуемая постановка соответствующих оптимизационных задач для нескольких управляющих функций, разыскиваемых в классе полиномов $f_i = \sum_{j=0}^m C_j x^j$. При этом ограничения на соответствующие функции накладываются только в виде (4) и (5).

Для решения оптимизационных задач наиболее универсальным подходом является подход, основанный на применении эвристических алгоритмов. В частности, в данном исследовании применен генетический алгоритм (ГА) для определения оптимальных коэффициентов полиномиальных разложений C_j управляющих функций. Область поиска соответствующих параметров в ГА определяется условиями (4) и (5). В качестве фитнес функции задается функция, которая на входе принимает коэффициенты C_j и возвращает значение спектрального параметра, определяемого на базе проекционного метода Галеркина.

2. Модельная задача об изгибных колебаниях упругого стержня с переменными модулем Юнга и площадью поперечного сечения. Рассмотрим свободные изгибные колебания в рамках модели Бернулли-Эйлера неоднородной балки длины l с переменной площадью поперечного сечения, определяемого переменным радиусом $r(x)$. Обезразмеренная краевая задача для консольной балки (**Задача 1**) имеет вид

$$(Eh^2 w'')'' - k^2 h w = 0, \quad x \in [0, 1];$$

$$w(0) = w'(0) = 0; \quad (9)$$

$$(Eh^2w'')(1) = (Eh^2w'')'(1) = 0.$$

Здесь $k^2 = A\rho\omega^2/h_0E_0$ и $h = r^2$ – соответственно спектральный параметр и функция, определяемая квадратом радиуса поперечного сечения балки.

Оптимизационная задача состоит в определении оптимальных функций $E(x)$, $h(x)$, при которых соответствующий спектральный параметр принимает максимальное значение.

Для управляющих функций сформулированы дополнительные условия на их средние распределения:

$$\int_0^1 E(x)dx = E_0, \quad \int_0^1 h(x)dx = h_0. \quad (10)$$

Получено соотношение Релея для первой собственной частоты и общий функционал

$$k^2 = \frac{\int_0^1 Eh^2w''^2dx}{\int_0^1 hw^2dx} \rightarrow \max_{E,h}; \quad (11)$$

$$J[E, h, w] = \frac{\int_0^1 Eh^2w''^2dx}{\int_0^1 hw^2dx} - \lambda_1 \left(\int_0^1 E(x)dx - E_0 \right) - \lambda_2 \left(\int_0^1 h(x)dx - h_0 \right), \quad (12)$$

где λ_1, λ_2 – постоянные множители Лагранжа.

Из вариационного принципа, проварьировав функционал J по E, h, w , получим следующие условия оптимальности:

$$h^2w''^2 = a^2, \quad a = \text{const}; \quad (13)$$

$$2hEw''^2 - k^2w^2 = b^2, \quad b = \text{const}; \quad (14)$$

$$(Eh^2w'')'' - k^2hw = 0, \quad (15)$$

где $a^2 = \lambda_1 \int_0^1 hw^2dx$, $b^2 = \lambda_2 \int_0^1 hw^2dx$. Путем несложных математических действий можно получить соотношение вида $\frac{a^2}{b^2} = \frac{h_0}{E_0}$.

К полученным условиям оптимальности следует добавить дополнительные условия вида (10) и граничные условия (8) или (9).

Рассмотрим частные случаи оптимизационной задачи (8)–(15).

Случай 1. Консольная балка постоянного поперечного сечения $h(x)$. В этом случае из условия (13) и граничных условий в нуле определяется первая собственная форма колебаний с точностью до произвольной константы [15, 17]. При этом возможно получить аналитическое решение задачи из условий оптимальности (15), добавив к ним дополнительные условия на свободном конце стержня вида $E(1) = 0, E'(1) = 0$. Тогда

$$w_* = x^2, \quad E_* = 20E_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right), \quad k_*^2 = 20. \quad (16)$$

В случае однородной балки постоянного поперечного сечения спектральная характеристика $k_*^2 = 12.36$.

Случай 2. Рассмотрим случай, когда функция, характеризующая площадь поперечного сечения меняется по линейному закону. С учетом дополнительных условий найдено $h_*(x) = 2h_0(1 - x)$. Далее, из дифференциального уравнения (13) и граничных условий в нуле (9) найдем функцию $w_*(x) = -\frac{a}{2h_0}((1 - x) \ln(1 - x) + x)$. Подставив в (15) найдем функцию $E_*(x) = k^2(1 - x)E_1(x, h_0)$, функция $E_1(x)$ не приводится в силу громоздкости. Далее, из условия (10) найдем k_*^2 .

Например, в случае $h_0 = 0.1$, $E_0 = 1$, $k_*^2 = 21$ выигрыш по сравнению со случаем 1 однородной балки постоянного поперечного сечения (16) составляет 5%. Вид оптимальной функции распределения модуля Юнга приведен на рисунке 1.

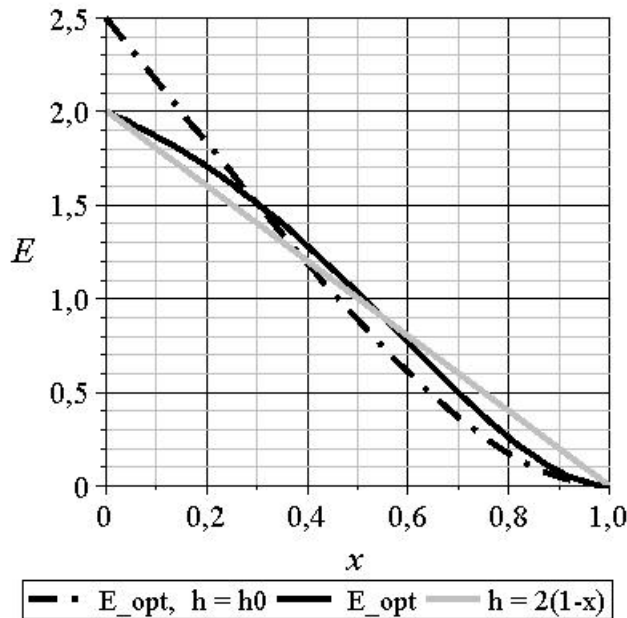


Рис.1. Оптимальное распределение E в случае балки постоянной площади поперечного сечения (штрихпунктир); E и $\frac{h}{h_0}$ в случае линейного закона изменения h (сплошные линии)

Случай 3. Случай распределения функций $E(x), h(x)$ по квадратичному закону исследован на основе численных алгоритмов с применением ГА. Так, например, при

$$h_0 = 0.1, E_0 = 1, E_{\min} = 0.5, E_{\max} = 2, h_{\min} = 0.05, h_{\max} = 0.5, \quad (17)$$

получено оптимальное значение спектрального параметра $k_*^2 = 36.415$ и оптимальные распределения модуля Юнга и толщины (рис. 2):

$$E_* = -1.756x^2 + 1.803x + 0.684, h_* = 0.174x^2 - 0.32x + 0.202.$$

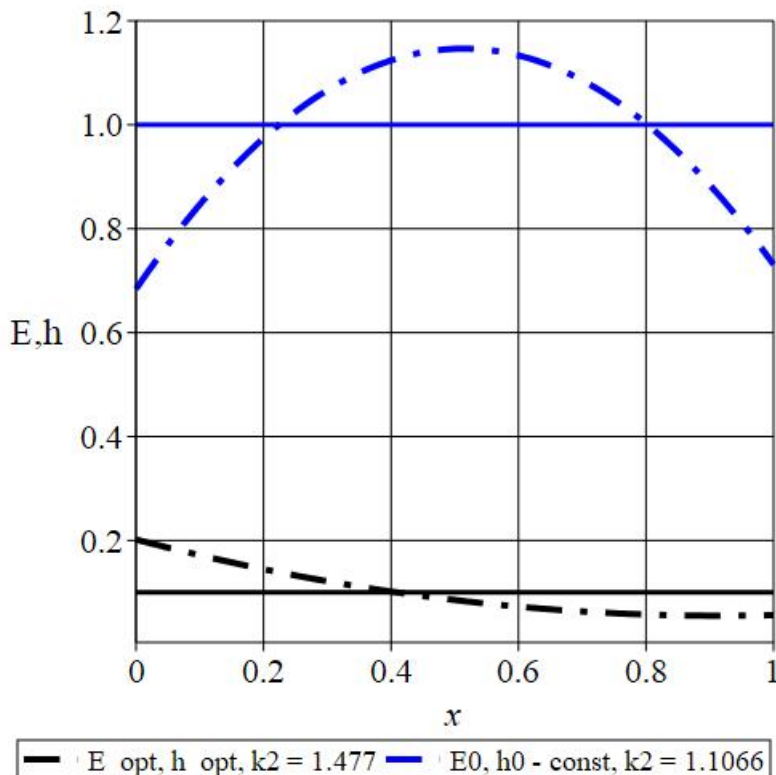


Рис.2. Оптимальное распределение E (синяя штрихпунктирная) и h (черная штрихпунктирная) в классе полиномов второй степени; сплошными линиями показаны случаи постоянных распределений

3. Модельная задача о собственных колебаниях круглой пластинки с переменным модулем Юнга и переменной толщиной. Рассмотрим модельную задачу о собственных изгибных колебаниях упругой неоднородной круглой пластинки (**Задача 2**) с переменным модулем Юнга $E(r)$ и переменной толщиной $h(r)$, которые изменяются по радиальной координате $r \in [0, R]$.

В рамках гипотез Кирхгофа-Лява [20] краевая задача имеет вид [14], [20]

$$\left(r \left[D \left(w'' + \frac{w'}{r} \right)' + D' \left(w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) \right] \right)' = \rho \omega^2 h r w; \quad (18)$$

$$D(r) = \frac{E(r) h^3}{12(1 - \nu^2)},$$

где ω , ρ , ν , D – круговая частота, плотность, коэффициент Пуассона (постоянный) и цилиндрическая жесткость соответственно.

Проведем обезразмеривание задачи, введя следующие безразмерные переменные и функции

$$r = \tilde{r}R, \quad w = \tilde{w}R, \quad h = h_0 R \tilde{h}(\tilde{r}), \quad E = \tilde{E}(\tilde{r}) E_0,$$

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2 R^2 A}{E_0}, \quad A = \frac{12(1-\nu^2)}{h_0^2},$$

где h_0, E_0 – характерные значения соответствующих функций, например, их значения при $r = R$. Знак волны в дальнейших выкладках будем опускать.

Рассмотрим случай жесткого закрепления края пластинки:

$$w'(1) = w(1) = 0, \quad (19)$$

$$w'(0) = 0, \quad Q_r(0) = 0,$$

где $Q_r = D\left(w'' + \frac{w'}{r}\right)' + D'\left(w'' + \nu\frac{w'}{r}\right)$, $M_{rr} = -D\left(w'' + \nu\frac{w'}{r}\right)$.

Соотношение Рейля для первой собственной частоты в случае упругой пластинки имеет вид

$$k^2 = \frac{\int_0^1 E h^3 \left(w''^2 + \frac{2\nu}{r} w' w'' + \frac{w'^2}{r^2} \right) dr}{\int_0^1 h w^2 r dr}. \quad (20)$$

Оптимизационная задача состоит в определении оптимальных функций $E(r)$, $h(r)$, доставляющих максимум первой собственной частоты, определяемой выражением (20) с учетом дополнительных условий вида (4) и (5):

$$\int_0^1 r E(r) dr = 1, \quad \int_0^1 r h(r) dr = 1.$$

Из вариационного принципа получим условия оптимальности в виде

$$h^3 \left(w''^2 + \frac{2\nu}{r} w' w'' + \frac{w'^2}{r^2} \right) = a^2, \quad a = const; \quad (21)$$

$$3h^2 E \left(w''^2 + \frac{2\nu}{r} w' w'' + \frac{w'^2}{r^2} \right) - k^2 w^2 = b^2, \quad b = const; \quad (22)$$

$$\left(r \left[D \left(w'' + \frac{w'}{r} \right)' + D' \left(w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) \right] \right)' - k^2 h r w = 0. \quad (23)$$

В случае Задачи 2 аналитическое решение получить не представляется возможным. Решение задачи об определении собственных частот неоднородной пластинки может быть получено численно на базе проекционного метода Галеркина. В качестве координатных функций выбраны удовлетворяющие граничным условиям функции, имеющие вид

$$\varphi_k(r) = (1 - r^2)^2 r^{2(k-1)}.$$

При этом решение представляется в виде линейной комбинации

$$w = \sum_{k=1}^n B_k \varphi_k(r).$$

Далее составляется интегральная невязка и из условия равенства нулю определителя системы относительно B_k определяются собственные частоты, в частности, первая собственная частота.

Оптимальная задача решена в классе четных функций – полиномов четвертой степени и сведена к определению полиномиальных коэффициентов из генетических алгоритмов. При этом в основе фитнес функции лежит описанная выше схема определения первой собственной частоты.

На рисунке 3 приведены результаты расчетов для случая $R = 1$, $\nu = 0.3$, $E_{min} = 0.5$, $E_{max} = 4$, $h_{min} = 0.5$, $h_{max} = 4$. При этом получено оптимальное значение спектрального параметра $k_*^2 = 37.251$. В случае же постоянных E_0 , h_0 получаем $k_*^2 = 28.894$, и, таким образом, выигрыш составляет порядка 28%.

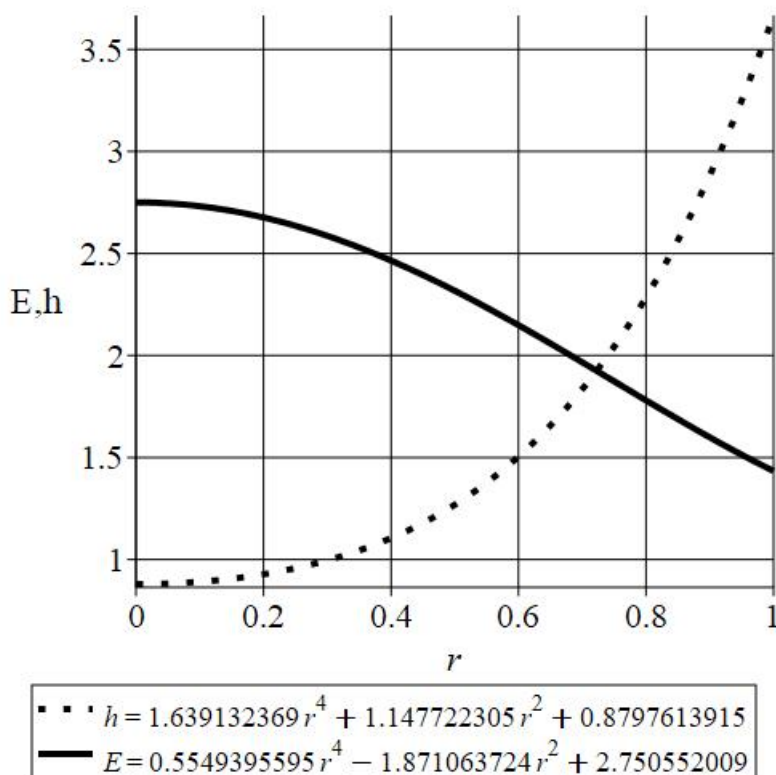


Рис. 3. Оптимальное распределение E и h для круглой пластинки

Заключение. Проведено исследование многокритериальной оптимизационной задачи для первой собственной частоты круглой неоднородной пластины и балки с переменными модулем Юнга и площадью поперечного сечения. Рассмотрены модельные задачи, получены условия оптимальности. Рассмотрена универсальная схема решения оптимизационной задачи поиска оптимальных распределений управляющих функций в классе полиномов на базе генетического алгоритма. Сравнительный анализ результатов со случаями постоянных

значений управляющих функций и результатами, полученными ранее в других работах, подтверждают оптимальность полученных решений.

Информация о финансовой поддержке: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

1. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
2. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций / Н. Ольхофф – М.: Наука, 1981. – 280 с.
3. Niordson I.F. On the optimal design of a vibrating beam / I.F. Niordson // Quarterly of Applied Mathematics. – 1965. – Vol. 23. – P. 47–53.
4. Bratus' A.S. The optimum shape of a bending beam / A.S. Bratus', V.P. Posvyanskii // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2000. – Vol. 64, № 6. – P. 993–1004. – DOI: 10.1016/S0021-8928(00)00131-3.
5. Gupta V.K. Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams / V.K. Gupta, P.N. Murthy // Journal of Sound and Vibration. – 1978. – Vol. 59, № 4. – P. 521–531.
6. Olhoff N. Optimum design of band-gap beam structures / N. Olhoff, B. Niu, G. Cheng // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – Vol. 49, № 22. – P. 3158–3169.
7. Гринев В.Б. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. / В.Б. Гринев, А.П. Филипов. – К.: Наукова думка, 1975. – 290 с.
8. Саркисян В.С. Оптимизация первой собственной частоты колебания прямоугольной пластинки со слабой неоднородностью / В.С. Саркисян, Г.М. Джулакян // Механика. Межвузовский сборник научных трудов. – Ереван: Изд-во ЕрГУ, 1984. – Вып. 3. – С. 120–125.
9. Jiang X. An explicit approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures / X. Jiang, W. Zhang, C. Liu, Z. Du, X. Guo // Appl. Math. Model.– 2023. – Vol. 113. – P. 613–639. – DOI: 10.1016/j.apm.2022.09.028.
10. Zhou Y. Topology optimization with wall thickness and piecewise developability constraints for foldable shape-changing structures / Y. Zhou, T. Nomura, E.M. Dede, K. Saitou // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2022. – Vol. 65, № 8. – P. 118. – DOI: 10.1007/s00158-022-03219-8.A
11. Kamiya A. Microstructural shape optimization method for natural vibration design of laminated porous shell structures / A. Kamiya, M. Shimoda, M. Al Ali // Composite Structures. – 2025. – Vol. 367, 119184. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.119184.
12. Belardi V.G. Overall elastic characterization of equivalent FE models for aluminum foams through computational homogenization approach and genetic algorithm optimization / V.G. Belardi, S. Trupiano, P. Fanelli, F. Vivio // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2024. – Vol. 103, 105189. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2023.105189.
13. Левин В.А. Топологическая оптимизация элементов конструкций с учетом структурной неоднородности материала с использованием градиентного метода / В.А. Левин, К.М. Зингерман, А.В. Вершинин, П.А. Васильев // Чебышевский сборник. – 2022. – Vol. 23, вып. 4. – С. 308–326. – DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-308-326.
14. Vatulyan A.O. On an optimization problem for a prestressed plate with variable stiffness / A.O. Vatulyan, R.D. Nedin // Problems of Strength and Plasticity. – 2024.– № 86. – P. 202–214. – DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-202-214.
15. Ватульян А.О. Оптимизация механических свойств вязкоупругих конструкций / А.О. Ватульян, О.В. Явруян // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, вып. 4. – С. 552–566. – DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566. – EDN: PNYSH.
16. Ватульян А.О. Некоторые аналитические решения в задачах оптимизации переменного коэффициента теплопроводности / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Владикавк. мат. журн. – 2024. – Т. 26, вып. 3. – С. 33–46. – DOI: 10.46698/v9056-4395-2233-f.
17. Ватульян А.О. О максимуме первой резонансной частоты для неоднородных упругих тел

- / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2024. – № 4. – С. 180–192. – DOI: 10.31857/S1026351924040121.
18. *Cho J.R.* Optimal Tailoring of CNT Distribution in Functionally Graded Porous CNTRC Beams / J.R. Cho, H.J. Kim // *Polymers*. – 2023. – № 15. – 349. – DOI: 10.3390/polym15020349.
 19. *Jamshidi M.* Optimal material tailoring of functionally graded porous beams for buckling and free vibration behaviors / M. Jamshidi, J. Arghavani // *Thin-Walled Structures*. – 2017. – Vol. 120. – P. 81–90.
 20. *Jamshidi M.* Post-buckling optimization of two-dimensional functionally graded porous beams / M. Jamshidi, J. Arghavani, Gh. Maboudi // *Int. J. Mech. Mater Des.* – 2019. – № 15. – P. 801–815. – DOI: 10.1007/s10999-019-09443-3.
 21. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.

О.В. Yavruyan

Optimization of mechanical properties and geometry of simple structural elements.

The paper studies the optimization problem of maximizing the first natural frequency for the simplest structural elements, such as beams and plates. The control functions are the mechanical elastic properties and geometric characteristics, which are functions of a single variable. The paper constructs the Rayleigh relations and derives the optimality conditions. It also explores model problems related to the bending vibrations of inhomogeneous elastic beams with circular cross-sections and circular plates. The optimal distributions of the cross-sectional area (plate thickness) and the Young's modulus in the class of polynomials are determined, taking into account their positivity properties, constraints on the average distribution, as well as upper and lower bounds on the values of the corresponding functions. The optimization problems are solved using genetic algorithms and the Galerkin projection method. The results of calculations and a comparative analysis with the homogeneous case are presented.

Keywords: *beam, circular plate, heterogeneity, geometry and properties optimization, first eigenfrequency, Galerkin method, genetic algorithm.*

*Статья поступила в редакцию 30.10.2025;
доработана 17.11.2025;
рекомендована к печати 26.11.2025.*