

УДК 517.95, 539.32, 534.222
doi:10.24412/0136-4545-2025-3-61-72
EDN:AAGAIJ



©2025. А.О. Ватульян¹, В.В. Дударев², С.А. Нестеров³

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ С ПУСТЫМИ ПОРАМИ

В рамках модели Ковина-Нунзиато исследована коэффициентная обратная задача для неоднородных пороупругих тел. Получены операторные уравнения для решения задачи идентификации переменных характеристик конечного пороупругого тела. В качестве примера рассмотрена обратная задача для пороупругого стержня. Исследовано влияние законов неоднородности модуля Юнга, плотности и модуля жесткости пор на торцевое смещение. Операторные уравнения аппроксимировались двумя способами: 1) на основе метода коллокаций; 2) на основе проекционного метода. Представлена итерационная схема реконструкции одномерных поромеханических характеристик. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции физико-механических характеристик как в точках внутри стержня, так и в классе описывающих идентифицируемые характеристики квадратичных функций.

Ключевые слова: микро-дилатационная теория, стержень с пустыми порами, колебания, обратная задача, интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, итерационная схема реконструкции.

Введение. Теория Ковина-Нунзиато широко применяется для нахождения напряженно-деформированного состояния упругих материалов с пустыми порами [1]. В рамках этой модели решено большое число задач о деформировании пороупругих однородных и слоистых тел [1–4].

¹Ватульян Александр Ованесович – доктор физ.-мат. наук, зав. каф. теории упругости инст-та математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону, e-mail: aovatulyan@sfedu.ru.

Vatulyan Aleksandr Ovanesovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich, Department of Theory of Elasticity.

²Дударев Владимир Владимирович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости инст-та математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону, e-mail: vvdudarev@sfedu.ru.

Dudarev Vladimir Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich, Department of Theory of Elasticity.

³Нестеров Сергей Анатольевич – доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. отдела дифференц. уравнений Южного математического инст-та - филиала ВНИИ РАН, Владикавказ, e-mail: 1079@list.ru.

Nesterov Sergey Anatolyevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Department of Differential Equations.

Отметим, что в последнее время стали внедряться функционально-градиентные пористые материалы (ФГПМ) – композиционные материалы, состоящих из двух или более компонентов, объемные доли которых плавно изменяются по заданному закону [5]. Такие пористые структуры являются перспективными, поскольку сочетают в себе преимущества пористых структур и объемных конструкций с переменными свойствами. Градиентный пористый материал теперь стало легче получить благодаря таким методам, как аддитивное производство или 3D-печать [6, 7]. Несмотря на свою практическую важность, исследования, посвященные анализу конструкций из ФГПМ [8–11] и идентификации их свойств путем решения коэффициентных обратных задач (КОЗ), находятся на начальном этапе. Исследование обратных задач опирается на дополнительную информацию, в качестве которой служат измеренные компоненты физических полей либо внутри тела [12], либо на его границе для различных моментов времени [13].

Теория Ковина-Нунзиато содержит ряд неклассических модулей, для нахождения которых в случае однородного тела в последнее время развиваются теоретические и экспериментальные подходы [14–17].

При решении обратных задач для упругих тел с насыщенными жидкостью порами в рамках модели Био, ранее проведенные исследования опираются на минимизацию функционала невязки с использованием градиентных методов [18], различных эвристических алгоритмов [19–21], либо на организацию итерационного процесса и решение операторных уравнений Фредгольма 1-го рода [22–24].

В настоящей работе исследуется коэффициентная обратная задача для неоднородных пороупругих тел модели Ковина-Нунзиато. Представлены результаты идентификации переменных характеристик пороупругого стержня.

1. Общая постановка задачи о колебаниях неоднородных пороупругих тел. Пусть упругое тело с пустыми порами имеет объем V и кусочно-гладкую границу $S = S_u \cup S_\varphi \cup S_\sigma \cup S_h$, где S_u , S_φ , S_σ , S_h – части поверхности тела, на которых заданы граничные условия для компонент вектора перемещений, функции пористости, классических и неклассических напряжений соответственно.

Постановка задачи динамической пороупругости в рамках модели Ковина-Нунзиато имеет вид [1]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i; \quad (1)$$

$$h_{i,i} + g = 0; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} n_j |_{S_\sigma} = p_i(t), \quad h_i n_i |_{S_h} = 0; \quad (3)$$

$$u_i |_{S_u} = u_i^0, \quad \varphi |_{S_\varphi} = \varphi_0; \quad (4)$$

$$u_i(x, 0) = \dot{u}_i(x, 0) = \varphi(x, 0) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + D_{ijkl} \varphi_{,k} + \beta_{ij} \varphi$ – компоненты тензора классических напряжений; $h_i = a_{ij} \varphi_{,i} + D_{ijk} \varepsilon_{jk}$ – компоненты вектора неклассических напряжений; $g = -(\omega \dot{\varphi} + \xi \varphi + \beta_{ij} \varepsilon_{ij})$ – неклассическая объемная сила; u_i – компоненты

Об идентификации переменных характеристик неоднородных упругих тел с пустыми порами

вектора перемещения; φ – пористость (микродилатация); $\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$ – компоненты классического тензора деформаций; c_{ijkl} – компоненты тензора упругих модулей; β_{ij} и D_{ijk} – компоненты тензора поромеханической связанности второго и третьего порядка соответственно; ρ – плотность; a_{ij} – компоненты тензора диффузии пор; ξ – модуль жесткости пор; ω – микровязкоупругий модуль; $p_i(t)$ – компоненты вектора нагрузки, изменяющиеся с течением времени.

Обезразмерим задачу (1)–(5) по правилам:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{L}, & U_i &= \frac{u_i}{L}, & \Phi &= \frac{\xi_0}{\beta_{11}^0} \varphi, & G &= \frac{g}{\xi_0}, & \Omega_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{c_{1111}^0}, \\ H_i &= \frac{h_i}{\xi_0 L}, & \bar{a}_{ij} &= \frac{a_{ij}}{\xi_0 L^2}, & \bar{\xi} &= \frac{\xi}{\xi_0}, & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0}, & \bar{c}_{ijkl} &= \frac{c_{ijkl}}{c_{1111}^0}, & t_0 &= \sqrt{\frac{\rho_0}{c_{1111}^0}} L, \\ \varepsilon &= \frac{\omega}{\xi_0 t_0}, & \delta_0 &= \frac{\beta_{11}^2}{\xi_0 c_{1111}^0}, & \bar{\beta}_{ij} &= \frac{\beta_{ij}}{\beta_{11}^0}, & \bar{D}_{ijk} &= \frac{D_{ijk}}{D_{ijk}^0}, & \tau &= \frac{t}{t_0}, & P_i &= \frac{p_i}{c_{1111}^0}.\end{aligned}$$

Здесь L – характерный линейный размер тела (например, его длина), δ_0 – параметр связанности.

Обезразмеренная постановка задачи (1)–(5) примет вид:

$$\Omega_{ij,j} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau^2}; \quad (6)$$

$$H_{i,j} + G = 0; \quad (7)$$

$$\Omega_{ij} n_j |_{S_\sigma} = P_i(\tau), \quad H_i n_i |_{S_h} = 0; \quad (8)$$

$$U_i |_{S_u} = U_i^0, \quad \Phi |_{S_\phi} = \Phi_0; \quad (9)$$

$$U_i(\bar{x}, 0) = \frac{\partial U_i}{\partial \tau}(\bar{x}, 0) = \Phi(\bar{x}, 0) = 0. \quad (10)$$

Прямая задача состоит в вычислении функций U_i и Φ из (6)–(10) при известных характеристиках \bar{a}_{ij} , $\bar{\beta}_{ij}$, \bar{D}_{ijk} , \bar{c}_{ijkl} , $\bar{\xi}$, $\bar{\rho}$, δ_0 , ε .

Здесь и далее будем рассматривать случай, когда параметры δ_0 , ε являются постоянными величинами. Обратная задача состоит в нахождении переменных характеристик $\bar{g}(\bar{a}_{ij}, \bar{\beta}_{ij}, \bar{D}_{ijk}, \bar{\xi}, \bar{\rho}, \bar{c}_{ijkl})$ из (6)–(10) по дополнительной информации, измеренной на части границы S_σ :

$$U_i |_{S_\sigma} = f_i(\bar{x}, \tau), \quad \tau \in [a_1, a_2], \quad i = 1..3, \quad j = 1..m. \quad (11)$$

2. Операторные уравнения для решения обратной задачи. КОЗ (6)–(11) является нелинейной задачей механики связанных полей. Применим для ее исследования итерационный подход [13], на каждом этапе которого необходимо решать операторное уравнение 1-го рода, основанное на слабой постановке.

Сначала, применив к уравнениям в развернутом виде (6)–(9) преобразование Лапласа, с учетом начальных условий (10), получим:

$$\left(\bar{c}_{ijkl} \tilde{U}_{k,l} + \delta_0 \bar{\beta}_{ij} \tilde{\Phi} + \delta_0 \bar{D}_{ijk} \tilde{\Phi}_{,k} \right)_{,j} = p^2 \bar{\rho} \tilde{U}_i; \quad (12)$$

$$(\bar{a}_i \tilde{\Phi}_{,i} + \bar{D}_{ijk} \tilde{U}_{i,k})_{,j} - \bar{\xi} \tilde{\Phi} - \bar{\beta}_{ij} \tilde{U}_{i,j} = \varepsilon p \tilde{\Phi}; \quad (13)$$

$$(\bar{c}_{ijkl} \tilde{U}_{k,l} + \delta_0 \bar{\beta}_{ij} \tilde{\Phi} + \delta_0 \bar{D}_{ijk} \tilde{\Phi}_{,k}) n_j |_{S_\sigma} = \tilde{P}_i, \quad (\bar{a}_{ij} \tilde{\Phi}_{,i} + \bar{D}_{ijk} \tilde{U}_{i,k}) n_j |_{S_h} = 0; \quad (14)$$

$$\tilde{U}_i |_{S_u} = \tilde{U}_i^0, \quad \tilde{\Phi} |_{S_\phi} = \tilde{\Phi}_0. \quad (15)$$

Умножим уравнения (12) на пробные функции \tilde{v}_i , где $\tilde{v}_i |_{S_u} = 0$. Уравнения (13) умножим на $\chi_1 \tilde{\vartheta}$, где $\tilde{\vartheta}$ – пробная функция, причем $\tilde{\vartheta} |_{S_\varphi} = 0$. Полученные произведения сложим и проинтегрируем по объему V . Далее граничное условие (14) на части S_σ умножим на $\chi_2 \tilde{v}_i$ и проинтегрируем по S_σ . Сложив интегралы, применим к ним теорему Остроградского – Гаусса, и, полагая $\chi_1 = \delta_0$, $\chi_2 = -1$, приравняем полученное выражение к нулю. Тогда получим слабую постановку задачи (12)–(15) в виде:

$$\begin{aligned} & - \int_V \bar{c}_{ijkl} \tilde{U}_{i,j} \tilde{\nu}_{k,l} dV - p^2 \int_V \bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{\nu}_i dV - \delta_0 \int_V \bar{\beta}_{ij} (\tilde{\Phi} \tilde{\nu}_{i,j} + \tilde{\theta} \tilde{U}_{i,j}) dV - \\ & - \delta_0 \int_V \bar{a}_{ij} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\theta}_{,j} dV - \delta_0 \int_V \bar{\xi} \tilde{\Phi} \tilde{\theta} dV - \delta_0 \int_V \bar{D}_{ijk} (\tilde{\Phi}_{,k} \tilde{\nu}_{i,j} + \tilde{\theta}_{,k} \tilde{U}_{i,j}) dV - \\ & - \delta_0 \varepsilon p \int_V \tilde{\Phi} \tilde{\theta} dV + \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \tilde{v}_i dS = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Будем различать два состояния: первое состояние – для функций $\tilde{U}_i^{(1)}$, $\tilde{v}_i^{(1)}$, $\tilde{\Phi}^{(1)}$, $\tilde{\vartheta}^{(1)}$, $\bar{c}_{ijkl}^{(1)}$, $\bar{\rho}^{(1)}$, $\bar{\xi}^{(1)}$, $\bar{a}_{ij}^{(1)}$, $\bar{\beta}_{ij}^{(1)}$, $\bar{D}_{ijk}^{(1)}$, $\delta_0^{(1)}$, $\varepsilon^{(1)}$ и второе – для функций $\tilde{U}_i^{(2)}$, $\tilde{v}_i^{(2)}$, $\tilde{\Phi}^{(2)}$, $\tilde{\vartheta}^{(2)}$, $\bar{c}_{ijkl}^{(2)}$, $\bar{\rho}^{(2)}$, $\bar{\xi}^{(2)}$, $\bar{a}_{ij}^{(2)}$, $\bar{\beta}_{ij}^{(2)}$, $\bar{D}_{ijk}^{(2)}$, $\delta_0^{(2)}$, $\varepsilon^{(2)}$. Найдем разность соотношений (16) для двух состояний и положим в ней $\tilde{v}_i^{(1)} = \tilde{U}_i^{(2)}$, $\tilde{v}_i^{(2)} = \tilde{U}_i^{(1)}$, $\tilde{\vartheta}^{(1)} = \tilde{\Phi}^{(2)}$, $\tilde{\vartheta}^{(2)} = \tilde{\Phi}^{(1)}$, $\tilde{\Phi}^{(1)} = \tilde{\Phi}^{(n-1)}$, $\tilde{\Phi}^{(2)} = \tilde{\Phi}^{(n-1)} + \delta \tilde{\Phi}^{(n-1)}$, $\tilde{U}_i^{(1)} = \tilde{U}_i^{(n-1)}$, $\tilde{U}_i^{(2)} = \tilde{U}_i^{(n-1)} + \delta \tilde{U}_i^{(n-1)}$, $\delta_0^{(1)} = \delta_0^{(2)}$, $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)}$, $\bar{\beta}_{ij}^{(1)} = \bar{\beta}_{ij}^{(n-1)}$, $\bar{\beta}_{ij}^{(2)} = \bar{\beta}_{ij}^{(n-1)} + \delta \bar{\beta}_{ij}^{(n-1)}$, $\bar{D}_{ijk}^{(1)} = \bar{D}_{ijk}^{(n-1)}$, $\bar{D}_{ijk}^{(2)} = \bar{D}_{ijk}^{(n-1)} + \delta \bar{D}_{ijk}^{(n-1)}$, $\bar{a}_{ij}^{(1)} = \bar{a}_{ij}^{(n-1)}$, $\bar{a}_{ij}^{(2)} = \bar{a}_{ij}^{(n-1)} + \delta \bar{a}_{ij}^{(n-1)}$, $\bar{c}_{ijkl}^{(1)} = \bar{c}_{ijkl}^{(n-1)}$, $\bar{c}_{ijkl}^{(2)} = \bar{c}_{ijkl}^{(n-1)} + \delta \bar{c}_{ijkl}^{(n-1)}$, $\bar{\xi}^{(1)} = \bar{\xi}^{(n-1)}$, $\bar{\xi}^{(2)} = \bar{\xi}^{(n-1)} + \delta \bar{\xi}^{(n-1)}$, $\bar{\rho}^{(1)} = \bar{\rho}^{(n-1)}$, $\bar{\rho}^{(2)} = \bar{\rho}^{(n-1)} + \delta \bar{\rho}^{(n-1)}$. Ограничившись только линейными слагаемыми, с учетом того, что $\tilde{U}_i^{(2)} |_{S_\sigma} = \tilde{f}_i$, получим:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \bar{c}_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{U}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{U}_{k,l}^{(n-1)} dV + p^2 \int_V \delta \bar{\rho}^{(n-1)} (\tilde{U}_i^{(n-1)})^2 dV + \\ & + \delta_0 \int_V \delta \bar{\beta}_{ij}^{(n-1)} \tilde{\Phi}^{(n-1)} U_{i,j}^{(n-1)} dV + \delta_0 \int_V \delta \bar{a}_{ij}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,j}^{(n-1)} dV + \\ & + \delta_0 \int_V \delta \bar{D}_{ijk}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,i}^{(n-1)} \tilde{U}_{j,k}^{(n-1)} dV + \delta_0 \int_V \delta \bar{\xi}^{(n-1)} (\tilde{\Phi}^{(n-1)})^2 dV = \end{aligned} \quad (17)$$

$$= - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty).$$

Выражение (17) есть интегральное уравнение Фредгольма (ИУФ) 1-го рода для нахождения функций-поправок $\delta \bar{g}^{(n-1)}$ ($\delta \bar{c}_{ijkl}^{(n-1)}$, $\delta \bar{\beta}_{ij}^{(n-1)}$, $\delta \bar{D}_{ijk}^{(n-1)}$, $\delta \bar{a}_{ij}^{(n-1)}$, $\delta \bar{\rho}^{(n-1)}$, $\delta \bar{\xi}^{(n-1)}$) на $(n-1)$ -ой итерации. В случае раздельного восстановления физико-механических характеристик вместо (17) получим упрощенные уравнения:

$$\int_V \delta \bar{c}_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{U}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{U}_{k,l}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty); \quad (18)$$

$$p^2 \int_V \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left(\tilde{U}_i^{(n-1)} \right)^2 dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty); \quad (19)$$

$$\delta_0 \int_V \delta \bar{\beta}_{ij}^{(n-1)} \tilde{U}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\Phi}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty); \quad (20)$$

$$\delta_0 \int_V \delta \bar{D}_{ijk}^{(n-1)} \tilde{U}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,k}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty); \quad (21)$$

$$\delta_0 \int_V \delta \bar{a}_{ij}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,j}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty); \quad (22)$$

$$\delta_0 \int_V \delta \bar{\xi}^{(n-1)} \left(\tilde{\Phi}^{(n-1)} \right)^2 dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty). \quad (23)$$

Из (19) следует, что при $p = 0$ ядро этого ИУФ обращается в нуль, что делает невозможной реконструкцию функции плотности в пространстве трансформант.

В случае восстановления характеристик на конечном временном интервале уравнения (18)–(23) обращают на основе аппарата операционного исчисления.

3. Численное исследование прямой задачи для пористого стержня.

Рассмотрим динамическую задачу для заземленного на торце $x = 0$ изотропно-упругого стержня с пустыми порами. Колебания вызываются под действием на другом торце $x = l$ нагрузки $\sigma_{11}(l, t) = p_1(t)$.

С учетом изотропии и одномерности задачи, выполним ее обезразмеривание по формулам раздела 2, полагая $\bar{c}_{ijkl} = \bar{E} \delta_{ij} \delta_{kl}$, $\bar{a}_{ij} = \bar{\alpha} \delta_{ij}$, $\bar{\beta}_{ij} = 1$, $\bar{D}_{ijk} = 0$, δ_{ij} – символ Кронекера. Примем за характерный линейный размер – длину стержня l , за безразмерную координату – $z = \frac{x}{l}$. Тогда обезразмеренная постановка задачи для стержня в развернутом виде примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{E}(z) \frac{\partial U}{\partial z} + \delta_0 \Phi \right) = \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \tau \geq 0; \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\alpha}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \bar{\xi}(z) \Phi - \frac{\partial U}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \tau \geq 0; \quad (25)$$

$$U(0, \tau) = \Phi(0, \tau) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(1, \tau) = 0, \quad \bar{E}(1) \frac{\partial U}{\partial z}(1, \tau) + \delta_0 \Phi(1, \tau) = P_1(\tau); \quad (26)$$

$$U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, 0) = \Phi(z, 0) = 0. \quad (27)$$

Выполняя действия, аналогичные решению задачи для термоупругого стержня [13], сведем задачу (24)–(27) к системе ИУФ 2-го рода в трансформантах Лапласа, которая имеет вид [25]:

$$\tilde{\Phi} = \int_0^1 G_1(z, \psi, p) \tilde{\Phi}(\psi, p) d\psi + \int_0^1 G_2(z, \psi, p) \tilde{\Omega}(\psi, p) d\psi; \quad (28)$$

$$\tilde{\Omega}_{11} = \int_0^1 G_3(z, \psi, p) \tilde{\Phi}(\psi, p) d\psi + \int_0^1 G_4(z, \psi, p) \tilde{\Omega}_{11}(\psi, p) d\psi + \tilde{P}_1 \quad (29)$$

где

$$G_1 = - \left(\bar{\xi}(\psi) + p\varepsilon - \frac{\delta_0}{\bar{E}(\psi)} \right) \int_0^{\min\{z, \psi\}} \frac{d\eta}{\bar{\alpha}(\eta)}, \quad G_2 = - \frac{1}{\bar{E}(\psi)} \int_0^{\min\{z, \psi\}} \frac{d\eta}{\bar{\alpha}(\eta)},$$

$$G_3 = - \frac{\delta_0}{\bar{E}(\psi)} p^2 \int_{\min\{z, \psi\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad G_4 = - \frac{p^2}{\bar{E}(\psi)} \int_{\min\{z, \psi\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta.$$

Для решения системы (28), (29) применялся метод коллокаций, а обращение трансформант функции пористости $\tilde{\Phi}$ и напряжений $\tilde{\Omega}_{11}$ в точках коллокаций $z_i, i = 1..s + 1$ осуществлялось с помощью теории вычетов.

Сравнение решения задачи (24)–(27) для однородного стержня предложенным методом с решением, полученным в КЭ-пакете FlexPDE, показало, что относительная погрешность решения предложенным методом для моментов времени $\tau > 10^{-4}$ не превышает 1%, если взять $s = 35$ узлов коллокаций.

При анализе влияния материальных свойств стержня на смещение в точке $z = 1$ выяснено, что $\bar{\alpha}(z)$ влияния практически не оказывает, влияние $\bar{\xi}(z)$ сказывается только при $\delta_0 \geq 0.25$, а $\bar{E}(z)$ и $\bar{\rho}(z)$ существенно влияют при любом δ_0 .

На рисунке 1 представлены графики торцевого смещения, которые соответствуют двум законам изменения а) модуля Юнга (рис. 1а), б) модуля жесткости пор (рис. 1б) в виде линейной функции (сплошная линия) и экспоненциальной функции $1.8e^{2.6z}$ (точки). В вычислениях полагалось: $\delta_0 = 0.4$, $\bar{\alpha} = 0.08$, $\varepsilon = 10^{-4}$, остальные безразмерные характеристики считались равными 1.

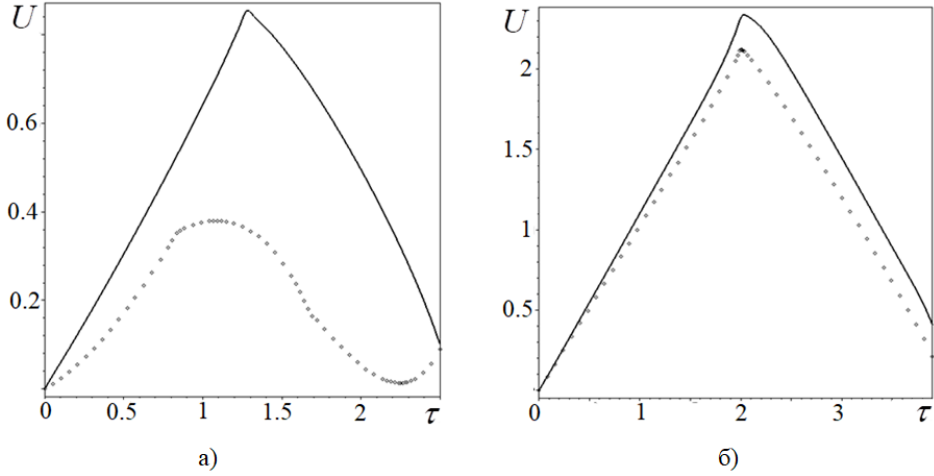


Рис. 1. Графики торцевого смещения для двух законов изменения: а) модуля Юнга; б) модуля жесткости пор

Таким образом, информация о смещении торца стержня в различные моменты времени может служить в качестве входной для идентификации модулей $\bar{E}(z)$, $\bar{\rho}(z)$ и $\bar{\xi}(z)$.

4. Исследование обратной задачи для пористого стержня. Постановка обратной задачи в случае стержня состоит в нахождении характеристик \bar{g} (\bar{E} , $\bar{\rho}$, $\bar{\xi}$) из (24)–(27) по дополнительной информации в некоторых точках временного отрезка:

$$U(1, \tau_j) = f(\tau_j), \quad \tau_j \in [a_1, a_2], \quad j = 1..r.$$

В случае нагрузки $P_1(\tau) = H(\tau)$ ($H(\tau)$ – функция Хевисайда) операторные уравнения для нахождения функций-поправок $\delta\bar{g}^{(n-1)}$ ($\delta\bar{E}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\rho}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\xi}^{(n-1)}$) в оригиналах можно представить в виде

$$\int_0^1 \delta\bar{g}^{(n-1)} M_s(z, \tau) dz = F(\tau), \quad s = 1..3, \quad \tau \in [a_1, a_2]. \quad (30)$$

Здесь $F(\tau) = -(f(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau))$ – правая часть интегральных уравнений, а $M_s(z, \tau)$ – ядра. Вид ядер $M_1(z, \tau)$ и $M_2(z, \tau)$ для нахождения модуля Юнга и плотности соответственно совпадает с представленным в [13], а ядро для нахождения модуля жесткости пор имеет вид

$$M_3(z, \tau) = \delta_0 \int_0^\tau \Phi^{(n-1)}(z, \tau_1) \frac{\partial \Phi^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1.$$

В работе конечномерная аппроксимация интегральных уравнений (30) осуществлялась как с помощью метода коллокаций (1-й подход), аналогично [13], так и с помощью проекционного метода (2-й подход). В первом случае физико-механические характеристики уточнялись в узлах коллокаций; во втором случае представлялись в виде разложения по степенным функциям: $\delta\bar{g}^{(n-1)}(z) = \sum_{i=1}^N b_i^{(n-1)} \eta_i(z)$, $\eta_i(z) = z^{i-1}$, $i = 1..N$. Второй подход приводит к необходимости решать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов разложения $b_i^{(n-1)}$:

$$\sum_{i=1}^N b_i^{(n-1)} A_{ij}^{(n-1)} = F_j^{(n-1)}, \quad j = 1..r, \quad (31)$$

где $A_{ij}^{(n-1)} = \int_0^1 \eta_i(z) M_s^{(n-1)}(z, \tau_j) dz$, $F_j^{(n-1)} = F^{(n-1)}(\tau_j)$, $s = 1..3$, $i = 1..N$, $j = 1..r$.

Для решения плохо обусловленной СЛАУ (31) в работе, следуя методу А.Н. Тихонова [26], осуществлен переход к регуляризованной системе с выбором параметра регуляризации по обобщенной невязке.

В работе итерационный процесс реконструкции состоит из двух этапов. Первый этап состоит в нахождении начального приближения $\bar{g}^{(0)} = (\bar{g}_- + \bar{g}_+)/2$. Здесь \bar{g}_- и \bar{g}_+ – минимальное и максимальное значения искомой функции соответственно. Второй этап состоит в уточнении искомых функций по правилу $\bar{g}^{(n)}(z) = \bar{g}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{g}^{(n-1)}(z)$, где функции-поправки $\delta\bar{g}^{(n-1)}(z)$ определяются путем решения интегральных уравнений (30) на $(n-1)$ -й итерации. При этом в случае 2-го подхода физико-механические характеристики уточняются поэтапно, сначала среди констант, затем линейных, а потом – квадратичных функций.

В качестве условий выхода из итерационного процесса выступают либо достижение предельного количества итераций $n = 20$, либо достижение функционалом невязки $J = \int_{a_1}^{a_2} (f(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau$ некоторого значения κ . В случае реконструкции среди констант $\kappa = 10^{-2}$, в классе линейных функций – $\kappa = 10^{-4}$, в классе квадратичных функций – $\kappa = 10^{-5}$.

5. Результаты идентификации. В данном разделе представлены итоги восстановления физико-механических характеристик пороупругого стержня при $\delta_0 = 0.4$, $\bar{\alpha} = 0.08$, $\varepsilon = 10^{-4}$ как поточечно, на основе 1-го подхода, так и в классе квадратичных функций на основе 2-го подхода. На рисунках ниже сплошная линия – точные функции; пунктир – восстановленные функции.

Результаты восстановления характеристик: а) $\bar{\rho}(z) = 0.79 + 0.41z + 1.92z^2$; б) $\bar{\xi}(z) = 2.37 - 1.46z^2$ на основе 1-го подхода представлены на рисунке 2 при $r = 5$ точках измерения входной информации внутри отрезка $[a_1, a_2] = [0.1, 0.9]$.

Из рисунка 2 следует, что модуль $\bar{\xi}(z)$ восстанавливается значительно хуже плотности, что связано с его меньшим влиянием на торцевое смещение.

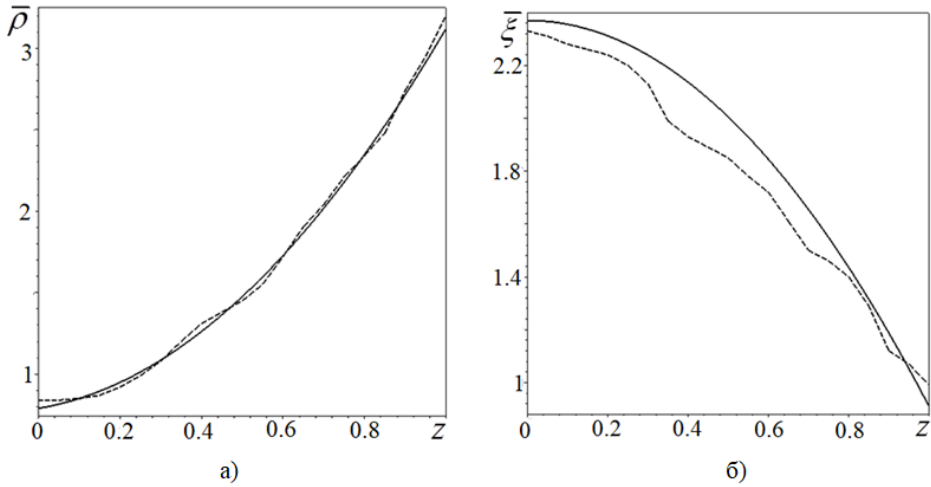


Рис. 2. Результаты реконструкции функций на основе 1-го подхода: а) $\bar{\rho}(z) = 0.79 + 0.41z + 1.92z^2$; б) $\bar{\xi}(z) = 2.37 - 1.46z^2$

На рисунке 3 представлены результаты восстановления функций: а) $\bar{\rho}(z) = 1.25 + 0.72e^{2.14z}$; б) $\bar{E}(z) = 1.43 + 0.56 \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$ на основе 2-го подхода при измерении входной информации в $r = 6$ точках отрезка $[a_1, a_2] = [0.05, 0.75]$.

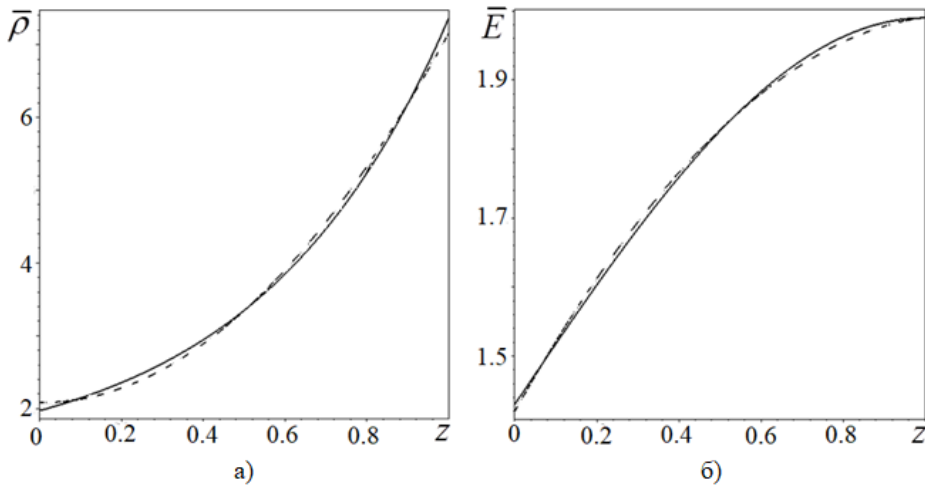


Рис. 3. Результаты реконструкции функций на основе 2-го подхода: а) $\bar{\rho}(z) = 1.25 + 0.72e^{2.14z}$; б) $\bar{E}(z) = 1.43 + 0.56 \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$

Выяснено, что погрешность реконструкции физико-механических характеристик при использовании 2-го подхода на 2–5% меньше, чем при 1-м подходе.

Проведено исследование погрешности реконструкции при различном уровне зашумления входной информации, которое моделировалось формулой $f_d(\tau_j) = (1 + q\nu_j) f(\tau_j)$, $j = 1..r$. Здесь $f(\tau_j)$ – точное значение торцевого смещения

в моменты времени τ_j ; q – амплитуда зашумления; ν_j – случайная величина с равномерным законом распределения на отрезке.

На рисунке 4 показаны графики восстановления функций: а) $\bar{E}(z) = 2.33 - 1.74z + 2.56z^2$; б) $\bar{\rho}(z) = 1.88 + 0.62e^{-2.74z}$ на основе 2-го подхода при 1%-м зашумлении ($q = 0.01$). Погрешность восстановления характеристик в случае зашумления входной информации не превысила 12%,

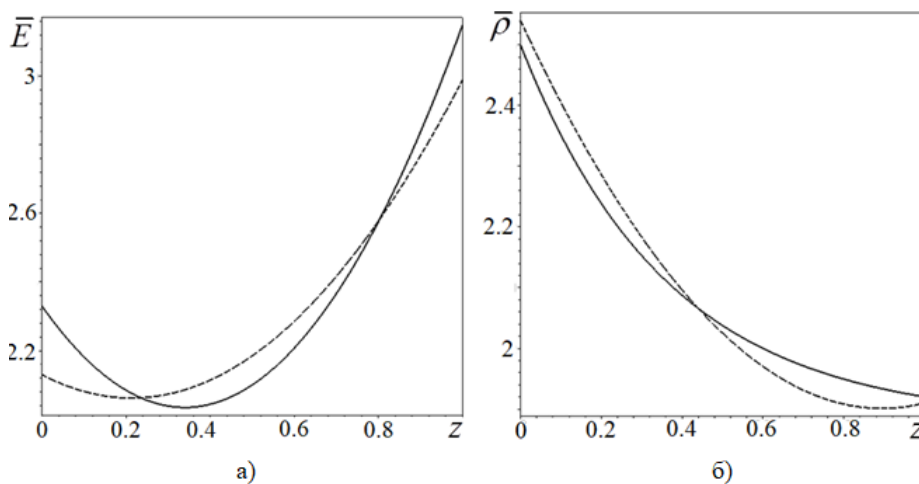


Рис. 4. Результат восстановления функций: а) $\bar{E}(z) = 2.33 - 1.74z + 2.56z^2$; б) $\bar{\rho}(z) = 1.88 + 0.62e^{-2.74z}$ при 1%-м шуме

Заключение. Получены операторные уравнения для решения обратной задачи для неоднородных поропругих тел в рамках теории Ковина-Нунзиато. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции переменных физико-механических характеристик стержня, как поточечно, так и в классе квадратных функций. Выяснено, что погрешность реконструкции физико-механических характеристик при использовании проекционного метода на 2–5% меньше, чем при восстановлении в узлах коллокаций. Однако при использовании проекционного метода можно восстановить только гладкие функции, которые хорошо аппроксимируются полиномами. Проверена устойчивость метода при наличии зашумления входных данных. При уровне шума 1% процента погрешность восстановления модуля Юнга и плотности не превысила 12%, что демонстрирует работоспособность алгоритма.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

1. Cowin S.C. Linear elastic materials with voids / S.C. Cowin, J.W. Nunziato // Journal of Elasticity. – 1983. – Vol. 13. – P. 125–147. – DOI: 10.1007/BF00041230.
2. Соляев Ю.О. Численное решение задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории упругости / Ю.О. Соляев, С.А. Лурье, А.В.Волков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, №2. – С. 137–152. – DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.12.

3. *Зеленцов В.Б.* Относительный объем пор при идентифицировании пористых материалов / В.Б. Зеленцов, А.Д. Загребнева, П.А. Лапина, С.М. Айзикович, Ванг Юн-Че. // Проблемы прочности и пластичности. – 2021. – Т. 83, № 4. – С. 462–470. – DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-462-470.
4. *Нестеров С.А.* О деформировании составных упругих тел с пустыми порами / С.А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 68–79. – DOI: 10.31429/vestnik-22-1-68-79.
5. *Chen D.* Functionally graded porous structures: analyses, performances, and applications – A Review / D. Chen, K. Gao, J. Yang, L. Zhang // Thin-Walled Structures. – 2023. – Vol. 191. – Article N 111046. – DOI: 10.1016/j.tws.2023.111046.
6. *Фомин В.М.* Создание функционально-градиентного материала методом аддитивного лазерного сплавления / В.М. Фомин, А.Г. Маликов, А.А. Гольшев, Н.В. Булина, А.И. Анчаров, И.Е. Витошкин, Т.А. Брусенцева, А.А. Филиппов // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 5. – С. 224–234. – DOI: 10.15372/PMTF20200523.
7. *Рудской А.И.* Функционально-градиентные материалы и аддитивные технологии их получения / А.И. Рудской, А.А. Попович. – СПб.: ПОЛИТЕХ ПРЕСС, 2022. – 360 с.
8. *Turan M.* Free vibration and buckling of functionally graded porous beams using analytical, finite element, and artificial neural network methods / M. Turan, U.E. Yaylaci, M. Yaylaci // Arch. Appl. Mech. – 2023. – Vol. 93. – P. 1351–1372. – DOI: 10.1007/s00419-022-02332-w.
9. *Iesan D.* On the Deformation of Functionally Graded Porous Elastic Cylinders / D. Iesan, A. Scalia // Journal of Elasticity. – 2007. – Vol. 87. – P. 147–159. – DOI: 10.1007/s10659-007-9101-9.
10. *Chirita S.* Rayleigh Waves on an Exponentially Graded Poroelastic Half Space / S. Chirita // Journal of Elasticity. – 2013. – Vol. 110. – P. 85–199. – DOI: 10.1007/s10659-012-9388-z.
11. *Ватульян А.О.* Колебания неоднородного пороупругого слоя с пустыми порами / А.О. Ватульян, Д.С. Шведов // Вестник ДГТУ. – 2013. – № 1–2 (70–71). – С. 49–57.
12. *Нестеров С.А.* Некоторые задачи идентификации физико-механических характеристик неоднородных тел при тепловом нагружении / С.А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 3. – С. 13–23. – DOI: 10.31429/vestnik-22-3-13-23.
13. *Ватульян А.О.* Коэффициентные обратные задачи термомеханики / А.О. Ватульян. – Таганрог: Изд-во Южного федерального ун-та, 2022. – 178 с.
14. *Ramezani H.* Analytical and numerical studies on penalized micro-dilatation (PMD) theory: macro-micro link concept / H. Ramezani, H. Steeb, J. Jeong // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2012. – Vol. 34. – P. 130–148. – DOI: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2011.11.002.
15. *Jeong J.* Porous media modeling and micro-structurally motivated material moduli determination via the micro-dilatation theory / J. Jeong, H. Ramezani, P. Sardini, D. Kondo, L. Ponso, M. Siitari-Kauppi // Eur. Phys. J. Special Topics. – 2015. – Vol. 224. – P. 1805–1816. – DOI: 10.1140/epjst/e2015-02500-2.
16. *Bishay P.L.* On the characterization of porosity-related parameters in micro-dilatation theory / P.L. Bishay, M. Repka, V. Sladek, J. Sladek // Acta Mech. – 2017. – Vol. 228. – P. 1631–1644. – DOI: 10.1007/s00707-016-1789-9.
17. *Chebakov M.I.* Methodology of Determination of Porosity Parameters in the Theory of Microdilatation / M.I. Chebakov, E.M. Kolosova // Springer Proceedings in Materials, Springer, Cham. – 2024. – Vol. 41. – P. 335–344. – DOI: 10.1007/978-3-031-52239-0_32.
18. *Lecampion B.* Sensitivity analysis for parameter identification in quasi-static poroelasticity / B. Lecampion, A. Constantinescu // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2005. – Vol. 29. – P. 163–185. – DOI: 10.1002/nag.409.
19. *Ляпин А.А.* О применении генетических алгоритмов и градиентных методов к задаче реконструкции поля предварительных напряжений в пороупругой неоднородной колонне / А.А. Ляпин, О.В. Руденко, Ю.А. Святко // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2016. – Т. 61, № 3. – С. 481–488. – DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.316.

20. *Dehghani H.* Poroelastic model parameter identification using artificial neural networks: on the effects of heterogeneous porosity and solid matrix Poisson ratio / H. Dehghani, A. Zilian // *Computational Mechanics*. – 2020. – Vol. 66. – P. 625–649. – DOI: 10.1007/s00466-020-01868-4.
21. *Имомназаров Х.Х.* Прямая и обратная динамическая задача пороупругости / Х.Х. Имомназаров, А.Э. Холмуродов, А.Т. Омонов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2022. – № 75. – С. 87–99. – DOI: 10.17223/19988621/75/8.
22. *Ватульян А.О.* Об обратных коэффициентных задачах пороупругости / А.О. Ватульян, А.А. Ляпин // *Известия РАН. МГТТ*. – 2013. – №2. – С. 114–121.
23. *Ватульян А.О.* Об особенностях идентификации неоднородных пороупругих характеристик полого цилиндра / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2016. – Т. 78, № 1. – С. 22–29.
24. *Vatulyan A.O.* On the Determination of the Biot Modulus of Poroelastic Cylinder / A.O. Vatulyan, R.M. Mnukhin, V.V. Dudarev, R.D. Nedin, D.V. Gusakov // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2019. – Vol. 93, № 3. – Article N e201800137. – DOI: 10.1002/zamm.201800137.
25. *Ватульян А.О.* Об обратной коэффициентной задаче для функционально-градиентных пористоупругих тел / А.О. Ватульян, В.В. Дударев, С.А. Нестеров // *Актуальные математические проблемы механики деформируемого твердого тела: Материалы VIII Всероссийской с международным участием научной конференции, посвященной 60-летию создания Донецкого научного центра, Донецкого государственного университета и научной школы академика Александра Сергеевича Космодамианского, Донецк – Севастополь, 18–21 сентября 2025 года*. – Донецк: Изд-во Донецкого государственного ун-та – 2025. – С. 36–39.
26. *Тихонов А.Н.* Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 232 с.

A.O. Vatulyan, V.V. Dudarev, S.A. Nesterov

On the features of identification of variable characteristics of inhomogeneous elastic bodies with voids.

The coefficient inverse problem for inhomogeneous poroelastic bodies is investigated in the framework of the Cowin-Nunziato model. Operator equations are obtained for solving the problem of identifying the variable characteristics of a finite poroelastic body. As an example, the inverse problem for a poroelastic rod is considered. The influence of the laws of inhomogeneity of Young's modulus, density, and pore stiffness on the end displacement is investigated. The operator equations were approximated in two ways: 1) based on the collocation method; 2) based on the projection method. An iterative scheme of reconstruction of one-dimensional poromechanical characteristics is presented. Computational experiments have been carried out to reconstruct the physical and mechanical characteristics, both at points inside the rod and in the class of quadratic functions.

Keywords: *micro-dilation theory, rod with voids, oscillations, inverse problem, Fredholm integral equation of the 1st kind, iterative reconstruction scheme.*

*Статья поступила в редакцию 28.10.2025;
доработана 12.11.2025;
рекомендована к печати 24.11.2025.*