МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 51-74:510.22:519.6:539.3
doi:10.24412/0136-4545-2023-4-72-80
EDN:SGWSTG

©2023. **А.С. Гольцев**[1], **С.Б. Номбре**[2], **Д.Д. Полянский**[3], **С.В. Сторожев**[4]

УЧЕТ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ СКОРОСТЕЙ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН

Представлена разработка алгоритма получения нечетко-множественных оценок влияния погрешностей в задании исходных параметров, связанных с разбросами экспериментальных данных и технологическими проектными допусками на результаты применения классической и учитывающей релаксацию теплового потока гиперболической расчетных моделей определения скоростей связанных термоупругих волн. Применена методика, которая основывается на переходе в функциональных соотношениях для расчета исследуемых скоростей в рамках детерминистических версий соответствующих моделей, к описывающим неконтрастность экзогенных характеристик нечетко-множественным параметрам-аргументам с фрагментированным

[1] *Гольцев Аркадий Сергеевич* – доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: a.s.goltsev@mail.ru.

Goltsev Arkady Sergeevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

[2] *Номбре Светлана Борисовна* – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.b.nombre@donnasa.ru.

Nombre Svetlana Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

[3] *Полянский Дмитрий Дмитриевич* – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

Polyansky Dmitry Dmitrievich – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

[4] *Сторожев Сергей Валериевич* – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

использованием арифметики нечетких величин и модифицированной альфа–уровневой формы эвристического принципа расширения. Получены расчетные соотношения для основных неконтрастных характеристик рассматриваемых моделей.

Ключевые слова: *термоупругие волны, модели расчета скоростей, разбросы исходных параметров, погрешности экспериментальных данных, технологические допуски, нечетко-множественный учет неопределенности, аппарат нечетких вычислений, эвристический принцип расширения.*

Введение и цели исследования. Для обширного ряда современных научно-технических отраслей, таких как энергетика, машино- и приборостроение, аэрокосмическая индустрия, технологии диагностики твердотельных объектов, одним из актуальных аспектов в проектных расчетах и количественном мониторинге эксплуатационных режимов является получение адекватных оценок для скоростей распространения термомеханических возмущений – связанных термоупругих волн [1–5]. При этом повышение качества расчетных оценок связано, в том числе, с учетом возможных погрешностей для значений исходных параметров расчетных моделей, обусловленных разбросами экспериментальных замеров различных физико-механических характеристик материалов и технологическими допусками в процессах их изготовления. Способы учета разбросов в значениях исходных параметров расчетных функциональных соотношений связаны с применением в исследуемых моделях методов вероятностно-стохастического анализа либо методов теории нечетких множеств [6, 7]. При этом особенностями применения нечетко-множественного подхода в исследованиях параметрических зависимостей для скоростей термоупругих волн являются менее строгие требования к характеру неконстрастной исходной информации, которая при использовании вероятностного подхода должна быть представлена однородными частотными выборками большой мощности, а также возможности учета данных эксклюзивных субъективных экспертных заключений. В контексте представленных соображений, целью данной работы является разработка нечетко-множественной методики учета параметрической неопределенности в виде разбросов значений исходных параметров при расчете скоростей связанных термоупругих волн в деформируемых средах.

1. Детерминистические расчетные модели для скоростей термоупругих волн. Актуальные апробированные модели расчета скоростей связанных термоупругих волн при учете различных групп факторов в рассматриваемых процессах представлены, в частности, в работах [8, 9]. Так, в рамках классической модели распространения гармонических термоупругих волн круговой частоты ω с плоским фронтом в изотропной среде с начальной температурой T_0, изотермическими параметрами Ламе λ и μ, коэффициентом объемного теплового расширения α_T, коэффициентом теплопроводности λ_0, плотностью ρ и параметром теплоемкости c_ε, фазовые скорости и декременты затухания квазиупругой (квазиакустической) v_1, ϑ_1 и квазитепловой (квазитермической) v_2, ϑ_2 составляющих соответственно определяются соотношениями [8]

$$v_1 = \omega / Re((1/2)(\sigma^2 + q(1+\varepsilon) + ((\sigma^2 + q(1+\varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}, \qquad (1)$$

$$\vartheta_1 = Im((1/2)(\sigma^2 + q(1+\varepsilon) + ((\sigma^2 + q(1+\varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}, \quad (2)$$

$$v_2 = \omega / Re((1/2)(\sigma^2 + q(1+\varepsilon) - ((\sigma^2 + q(1+\varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}, \quad (3)$$

$$\vartheta_2 = Im((1/2)(\sigma^2 + q(1+\varepsilon) - ((\sigma^2 + q(1+\varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}, \quad (4)$$

$$\sigma = \omega/c_1, \quad q = i\omega/\varsigma, \quad \varepsilon = m\eta\varsigma, \quad c_1 = ((\lambda+2\mu)/\rho)^{1/2}, \quad \varsigma = \lambda_0/c_\varepsilon, \quad (5)$$
$$\eta = \gamma T_0/\lambda_0, \quad m = \gamma/(c_1^2\rho), \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T.$$

В рамках модели гиперболической теплопроводности с релаксацией теплового потока [10, 11] асимптоты скоростей и коэффициентов затухания квазиупругой и квазитепловой составляющих рассчитываются на базе соотношений, записываемых, по большей части, в обозначениях работы [11]:

$$v_{1ag} = (2/(A_1 + A_2 - a_*))^{1/2}, \quad v_{2ag} = (2/(A_1 + A_2 + a_*))^{1/2}, \quad (6)$$

$$\vartheta_{1ag} = A_3(a_* - b_*)(2a_*(2(A_1 + A_2 - a_*))^{1/2})^{-1}, \quad (7)$$
$$\vartheta_{2ag} = A_3(a_* + b_*)(2a_*(2(A_1 + A_2 + a_*))^{1/2})^{-1},$$

$$a_* = ((A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4)^{1/2}, \quad b_* = A_2 + A_1(2A_4 - 1); \quad (8)$$
$$A_1 = \rho/(K + (4/3)G), \quad A_2 = \tau A_3, \quad A_3 = \lambda_0^{-1}(\rho c_\varepsilon + \alpha_T^2 K T_0 (1 + (4/3)GK^{-1})^{-1}),$$
$$A_4 = (1 + \rho c_\varepsilon (1 + (4/3)GK^{-1})/(\alpha_T^2 K T_0))^{-1};$$

ρ – плотность изотропной среды, T_0 – начальное отсчетное значение температуры, $K = \lambda + (2/3)\mu$ – изотермический модуль объемного сжатия, G – изотермический модуль сдвига, α_T – коэффициент объемного теплового расширения, λ_0 – коэффициент теплопроводности, c_ε – параметр теплоемкости при постоянном объеме, τ – параметр постоянной релаксации теплового потока.

Расчет подлежащих анализу значений непосредственно для величин фазовых скоростей $v_g(\omega)$ и коэффициентов затухания $\vartheta_g(\omega)$ рассматриваемых волн, в целях реализуемого алгоритма исследования учета влияния фактора параметрической неопределенности, осуществляется с использованием полученной в [10] системы дисперсионных соотношений

$$\vartheta^4 - 6\vartheta^2k^2 + k^4 + 2A_3\vartheta k\omega + (A_1 + A_2)(\vartheta^2 - k^2)\omega^2 - A_1A_2(A_4 - 1)\omega^4 = 0, \quad (9)$$
$$4\vartheta k^3 - A_3\omega(k^2 + A_1(A_4 - 1)\omega^2) - (4\vartheta^3 + 2(A_1 + A_2)\vartheta\omega)k + 3\vartheta^2\omega = 0,$$

по следующей схеме: из второго соотношения (9), рассматриваемого как кубическое уравнение относительно величины k, по формулам Кардано записываются три варианта представлений

$$k = \Phi_j(\vartheta,\ \omega, A_1, A_2, A_3, A_4); \quad (10)$$

на основе подстановки этих представлений в первое уравнение (9) записываются три варианта численно исследуемого нелинейного уравнения

$$\vartheta_j(\omega, A_1, A_2, A_3, A_4) = 0; \quad (11)$$

после расчета отвечающих физическим условиям рассматриваемой модели корней $\vartheta_*(\omega)$ уравнения (11), как коэффициентов затухания волны с круговой частотой ω, определяется значения фазовой скорости соответствующей волны

$$v(\omega) = \omega/\Phi(\vartheta_*(\omega), \omega). \tag{12}$$

Дальнейшей задачей исследования является построение нечетко-множественных обобщений представленных выше расчетных алгоритмов на основе эвристического принципа обобщения в альфа-уровневой модификации и поэтапного фрагментированного применения аппарата нечетко-множественных вычислений в процессе перехода к обладающим разбросами нечетким аргументам в расчетных соотношениях для характеристик детерминистических вариантов рассматриваемых моделей [13].

2. Нечетко-множественное обобщение расчетного алгоритма в рамках классической модели теплопроводности. При разработке нечетко-множественной модификации расчетных соотношений (1)–(4), их исходные физико-механические, а также промежуточные и выходные параметры, интерпретируются как выпуклые нечетко-множественные величины $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}_0$, $\tilde{c}_\varepsilon$, α_T, $\tilde{\rho}$, $\tilde{T}_0$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{q}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{c}_1$, $\tilde{\zeta}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{m}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{v}_1$, $\tilde{\vartheta}_1$, $\tilde{v}_2$, $\tilde{\vartheta}_2$, представленные суперпозициями множеств α-уровня

$$\tilde{\lambda} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha], \quad \tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha], \ ..., \tag{13}$$
$$\tilde{m} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha], \quad \tilde{\gamma} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha];$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(\omega) &= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{v}_{1\alpha}(\omega), \overline{v}_{1\alpha}(\omega)], \quad \tilde{\vartheta}_1(\omega) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\vartheta}_{1\alpha}(\omega), \overline{\vartheta}_{1\alpha}(\omega)],\\ \tilde{v}_2(\omega) &= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{v}_{2\alpha}(\omega), \overline{v}_{2\alpha}(\omega)], \quad \tilde{\vartheta}_2(\omega) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\vartheta}_{2\alpha}(\omega), \overline{\vartheta}_{2\alpha}(\omega)]. \end{aligned} \tag{14}$$

В случае интерпретации неконтрастных исходных параметров $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}_0$, $\tilde{c}_\varepsilon$, α_T, $\tilde{\rho}$, $\tilde{T}_0$ треугольными нормальными нечеткими числами $\tilde{\lambda} = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$, $\tilde{\mu} = (\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3)$, $\tilde{\lambda}_0 = (\lambda_{01},\ \lambda_{02},\ \lambda_{03})$, $\tilde{c}_\varepsilon = (c_{\varepsilon 1},\ c_{\varepsilon 2},\ c_{\varepsilon 3})$, $\tilde{\alpha}_T = (\alpha_{T1},\ \alpha_{T2},\ \alpha_{T3})$, $\tilde{\rho} = (\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3)$, $\tilde{T}_0 = (T_{01},\ T_{02},\ T_{03})$, соответствующие границы интервалов α – уровня имеют вид

$$\begin{gathered} \underline{\lambda}_\alpha = (1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2, \quad \overline{\lambda}_\alpha = \alpha\lambda_2 + (1-\alpha)\lambda_3;\\ \underline{\mu}_\alpha = (1-\alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2, \quad \overline{\mu}_\alpha = \alpha\mu_2 + (1-\alpha)\mu_3; ...;\\ \underline{T}_{0\alpha} = (1-\alpha)T_{01} + \alpha T_{02}, \quad \overline{T}_{0\alpha} = \alpha T_{02} + (1-\alpha)T_{03}. \end{gathered} \tag{15}$$

Промежуточные параметры $\tilde{\sigma}$, $\tilde{q}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{c}_1$, $\tilde{\zeta}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{m}$, $\tilde{\gamma}$ обобщаемой расчетной модели, определяемые соотношениями (5), могут быть получены в явной форме с применением аппарата арифметики треугольных нечетких чисел [9–10, 16–17]:

$$
\begin{gathered}
\tilde{c}_1=(c_{11},\ c_{12},\ c_{13}),\quad c_{11}=(\lambda_1+2\mu_1)/\rho_3,\quad c_{12}=(\lambda_2+2\mu_2)/\rho_2,\\
c_{13}=(\lambda_3+2\mu_3)/\rho_1;\quad \tilde{\gamma}=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3),\quad \gamma_1=(3\lambda_1+2\mu_1)\alpha_{T1},\\
\gamma_2=(3\lambda_2+2\mu_2)\alpha_{T2},\quad \gamma_3=(3\lambda_3+2\mu_3)\alpha_{T3};\\
\tilde{\sigma}=(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3),\quad \sigma_1=\omega/c_{13},\quad \sigma_2=\omega/c_{12},\quad \sigma_3=\omega/c_{11};\\
\tilde{\zeta}=(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3),\quad \zeta_1=\lambda_{01}/c_{\varepsilon 3},\quad \zeta_2=\lambda_{02}/c_{\varepsilon 2},\quad \zeta_3=\lambda_{03}/c_{\varepsilon 1};\qquad (16)\\
\tilde{q}=(q_1,\ q_2,\ q_3),\quad q_1=i\omega/\zeta_3,\quad q_2=i\omega/\zeta_2,\quad q_3=i\omega/\zeta_1;\\
\tilde{\eta}=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3),\quad \eta_1=\gamma_1T_{01}/\lambda_{03},\quad \eta_2=\gamma_2T_{02}/\lambda_{02},\quad \eta_3=\gamma_3T_{03}/\lambda_{01};\\
\tilde{m}=(m_1,\ m_2,\ m_3),\quad m_1=\gamma_1/(c_{13}^2\rho_3),\quad m_2=\gamma_2/(c_{12}^2\rho_2),\quad m_3=\gamma_3/(c_{11}^2\rho_1);\\
\tilde{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3),\quad \varepsilon_1=m_1\eta_1\zeta_1,\quad \varepsilon_2=m_2\eta_2\zeta_2,\quad \varepsilon_3=m_3\eta_3\zeta_3.
\end{gathered}
$$

Непосредственно расчет характеристик $\tilde{v}_1,\ \tilde{\vartheta}_1,\ \tilde{v}_2,\ \tilde{\vartheta}_2$ осуществляется на основе применения альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения [9, 10], в рамках которого они определяются в форме (14), где

$$
\begin{aligned}
\underline{v}_{1\alpha}(\omega)&=\inf_{\substack{\sigma\in[\underline{\sigma}_\alpha,\overline{\sigma}_\alpha]\\ q\in[\underline{q}_\alpha,\overline{q}_\alpha]\\ \varepsilon\in[\underline{\varepsilon}_\alpha,\overline{\varepsilon}_\alpha]}}\{\omega/Re((1/2)(\sigma^2+q(1+\varepsilon)+((\sigma^2+q(1+\varepsilon))^2-4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\},\\
\overline{v}_{1\alpha}(\omega)&=\sup_{\substack{\sigma\in[\underline{\sigma}_\alpha,\overline{\sigma}_\alpha]\\ q\in[\underline{q}_\alpha,\overline{q}_\alpha]\\ \varepsilon\in[\underline{\varepsilon}_\alpha,\overline{\varepsilon}_\alpha]}}\{\omega/Re((1/2)(\sigma^2+q(1+\varepsilon)+((\sigma^2+q(1+\varepsilon))^2-4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\};
\end{aligned}\qquad (17)
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\vartheta}_{1\alpha}(\omega)&=\inf_{\substack{\sigma\in[\underline{\sigma}_\alpha,\overline{\sigma}_\alpha]\\ q\in[\underline{q}_\alpha,\overline{q}_\alpha]\\ \varepsilon\in[\underline{\varepsilon}_\alpha,\overline{\varepsilon}_\alpha]}}\{Im((1/2)(\sigma^2+q(1+\varepsilon)+((\sigma^2+q(1+\varepsilon))^2-4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\},\\
\overline{\vartheta}_{1\alpha}(\omega)&=\sup_{\substack{\sigma\in[\underline{\sigma}_\alpha,\overline{\sigma}_\alpha]\\ q\in[\underline{q}_\alpha,\overline{q}_\alpha]\\ \varepsilon\in[\underline{\varepsilon}_\alpha,\overline{\varepsilon}_\alpha]}}\{Im((1/2)(\sigma^2+q(1+\varepsilon)+((\sigma^2+q(1+\varepsilon))^2-4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\};
\end{aligned}\qquad (18)
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{v}_{2\alpha}(\omega)&=\inf_{\substack{\sigma\in[\underline{\sigma}_\alpha,\overline{\sigma}_\alpha]\\ q\in[\underline{q}_\alpha,\overline{q}_\alpha]\\ \varepsilon\in[\underline{\varepsilon}_\alpha,\overline{\varepsilon}_\alpha]}}\{\omega/Re((1/2)(\sigma^2+q(1+\varepsilon)-((\sigma^2+q(1+\varepsilon))^2-4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\},\\
\overline{v}_{2\alpha}(\omega)&=\sup_{\substack{\sigma\in[\underline{\sigma}_\alpha,\overline{\sigma}_\alpha]\\ q\in[\underline{q}_\alpha,\overline{q}_\alpha]\\ \varepsilon\in[\underline{\varepsilon}_\alpha,\overline{\varepsilon}_\alpha]}}\{\omega/Re((1/2)(\sigma^2+q(1+\varepsilon)-((\sigma^2+q(1+\varepsilon))^2-4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\};
\end{aligned}\qquad (19)
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\vartheta}_{2\alpha}(\omega)&=\inf_{\substack{\sigma\in[\underline{\sigma}_\alpha,\overline{\sigma}_\alpha]\\ q\in[\underline{q}_\alpha,\overline{q}_\alpha]\\ \varepsilon\in[\underline{\varepsilon}_\alpha,\overline{\varepsilon}_\alpha]}}\{Im((1/2)(\sigma^2+q(1+\varepsilon)-((\sigma^2+q(1+\varepsilon))^2-4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\},\\
\overline{\vartheta}_{2\alpha}(\omega)&=\sup_{\substack{\sigma\in[\underline{\sigma}_\alpha,\overline{\sigma}_\alpha]\\ q\in[\underline{q}_\alpha,\overline{q}_\alpha]\\ \varepsilon\in[\underline{\varepsilon}_\alpha,\overline{\varepsilon}_\alpha]}}\{Im((1/2)(\sigma^2+q(1+\varepsilon)-((\sigma^2+q(1+\varepsilon))^2-4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\};
\end{aligned}\qquad (20)
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\sigma}_\alpha &= (1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2, \quad \overline{\sigma}_\alpha = \alpha\sigma_2 + (1-\alpha)\lambda\sigma_3;\\
\underline{q}_\alpha &= (1-\alpha)q_1 + \alpha q_2, \quad \overline{q}_\alpha = \alpha q_2 + (1-\alpha)q_3;\\
\underline{\varepsilon}_\alpha &= (1-\alpha)\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_2, \quad \overline{\varepsilon}_\alpha = \alpha\varepsilon_2 + (1-\alpha)\varepsilon_3;
\end{aligned}
\tag{21}
$$

а величины σ_j, q_j, ε_j рассчитываются по формулам (16).

3. Нечетко-множественное обобщение расчетного алгоритма в рамках модели гиперболической теплопроводности. Нечетко-множественная модификация расчетного алгоритма (6)–(8) для определения асимптот скоростей и коэффициентов затухания квазиупругой и квазитепловой составляющих объемных термоупругих волн в рамках модели гиперболической теплопроводности с релаксацией теплового потока строится по схеме, аналогичной вышеописанной. Применительно к исходным параметрам в представлениях (8), а также к промежуточным параметрам расчетного алгоритма (6)–(8), в дополнение к (13) вводятся нечетко-множественные характеристики

$$
\begin{gathered}
\tilde{K} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{K}_\alpha, \overline{K}_\alpha],\\
\underline{K}_\alpha = (1-\alpha)K_1 + \alpha K_2, \quad \overline{K}_\alpha = \alpha K_2 + (1-\alpha)K_3, \quad K_j = \lambda_j + (2/3)\mu_j;\\
\tilde{\tau} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\tau}_\alpha, \overline{\tau}_\alpha], \quad \underline{\tau}_\alpha = (1-\alpha)\tau_1 + \alpha\tau_2, \quad \overline{\tau}_\alpha = \alpha\tau_2 + (1-\alpha)\tau_3;\\
\tilde{a}_* = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{a}_{*\alpha}, \overline{a}_{*\alpha}], \quad \tilde{b}_* = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{b}_{*\alpha}, \overline{b}_{*\alpha}],\\
\tilde{A}_j = (A_{j1},\ A_{j2},\ A_{j3}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{A}_{j\alpha}, \overline{A}_{j\alpha}],\\
\underline{A}_{j\alpha} = (1-\alpha)A_{j1} + \alpha A_{j2}, \quad \overline{A}_{j\alpha} = \alpha A_{j2} + (1-\alpha)A_{j3}, \quad (j = \overline{1,\ 4}).
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Расчетные формулы для $\tilde{A}_j$ базируются на аппарате стандартной арифметики треугольных нормальных нечетких чисел и имеют вид:

$$
\begin{gathered}
A_{11} = \rho_1/(K_3 + (4/3)G_3),\ A_{12} = \rho_2/(K_2 + (4/3)G_2),\ A_{13} = \rho_3/(K_1 + (4/3)G_1);\\
A_{21} = \tau_1 A_{31}, \quad A_{22} = \tau_2 A_{32}, \quad A_{23} = \tau_3 A_{33};\\
A_{31} = \lambda_{03}^{-1}(\rho_1 c_{\varepsilon 1} + \alpha_{T1}^2 K_1 T_{01}(1 + (4/3)G_3 K_1^{-1})^{-1}),\\
A_{32} = \lambda_{02}^{-1}(\rho_2 c_{\varepsilon 2} + \alpha_{T2}^2 K_2 T_{02}(1 + (4/3)G_2 K_2^{-1})^{-1}),\\
A_{33} = \lambda_{01}^{-1}(\rho_3 c_{\varepsilon 3} + \alpha_{T3}^2 K_3 T_{03}(1 + (4/3)G_1 K_3^{-1})^{-1});\\
A_{41} = (1 + \rho_3 c_{\varepsilon 3}(1 + (4/3)G_3 K_1^{-1})/(\alpha_{T1}^2 K_1 T_{01}))^{-1},\\
A_{42} = (1 + \rho_2 c_{\varepsilon 2}(1 + (4/3)G_2 K_2^{-1})/(\alpha_{T2}^2 K_2 T_{02}))^{-1},\\
A_{43} = (1 + \rho_1 c_{\varepsilon 1}(1 + (4/3)G_1 K_3^{-1})/(\alpha_{T2}^2 K_3 T_{03}))^{-1}.
\end{gathered}
\tag{23}
$$

При формировании представлений для $\tilde{a}_*$, $\tilde{b}_*$, а затем и для $\tilde{v}_{1ag}$, $\tilde{\vartheta}_{1ag}$, $\tilde{v}_{2ag}$, $\tilde{\vartheta}_{2ag}$ на основе модифицированного эвристического принципа обобщения используются следующие оценки для частных производных с учетом свойств положительной определенности значений параметров A_j [10]:

$$\begin{gathered}\partial a_*/\partial A_4 > 0, \quad \partial b_*/\partial A_2 > 0, \quad \partial b_*/\partial A_4 > 0; \quad \partial v_{1ag}/\partial A_1 < 0, \quad \partial v_{1ag}/\partial A_2 < 0,\\ \partial v_{1ag}/\partial a_* > 0; \quad \partial v_{2ag}/\partial A_1 < 0, \quad \partial v_{2ag}/\partial A_2 < 0, \quad \partial v_{2ag}/\partial a_* < 0;\\ \partial\,\vartheta_{1ag}/\partial b_* < 0, \quad \partial\,\vartheta_{1ag}/\partial A_1 < 0, \quad \partial\,\vartheta_{1ag}/\partial A_2 < 0, \quad \partial\,\vartheta_{1ag}/\partial A_3 > 0;\\ \partial\,\vartheta_{2ag}/\partial b_* > 0, \quad \partial\,\vartheta_{2ag}/\partial A_1 < 0, \quad \partial\,\vartheta_{2ag}/\partial A_2 < 0, \quad \partial\,\vartheta_{2ag}/\partial A_3 > 0.\end{gathered} \tag{24}$$

В итоге, с учетом (22)–(24), для компонентов представлений $\tilde{v}_{1ag}$, $\tilde{\vartheta}_{1ag}$, $\tilde{v}_{2ag}$, $\tilde{\vartheta}_{2ag}$ могут быть записаны выражения

$$\begin{gathered}\underline{a}_{*\alpha} = \inf_{\substack{A_1\in[\underline{A}_{1\alpha},\overline{A}_{1\alpha}]\\ A_2\in[\underline{A}_{2\alpha},\overline{A}_{2\alpha}]}} ((A_1-A_2)^2+4A_1A_2\underline{A}_{4\alpha})^{1/2},\\ \overline{a}_{*\alpha} = \sup_{\substack{A_1\in[\underline{A}_{1\alpha},\overline{A}_{1\alpha}]\\ A_2\in[\underline{A}_{2\alpha},\overline{A}_{2\alpha}]}} ((A_1-A_2)^2+4A_1A_2\overline{A}_{4\alpha})^{1/2};\end{gathered} \tag{25}$$

$$\underline{b}_{*\alpha} = \inf_{A_1\in[\underline{A}_{1\alpha},\overline{A}_{1\alpha}]} \underline{A}_{2\alpha}+A_1(2\underline{A}_{4\alpha}-1), \quad \overline{b}_{*\alpha} = \sup_{A_1\in[\underline{A}_{1\alpha},\overline{A}_{1\alpha}]} \overline{A}_{2\alpha}+A_1(2\overline{A}_{4\alpha}-1);$$

$$\underline{v}_{1ag\alpha} = (2/(\overline{A}_{1\alpha}+\overline{A}_{2\alpha}-\underline{a}_{*\alpha}))^{1/2}, \quad \overline{v}_{1ag\alpha} = (2/(\underline{A}_{1\alpha}+\underline{A}_{2\alpha}-\overline{a}_{*\alpha}))^{1/2};$$

$$\underline{v}_{2ag\alpha} = (2/(\overline{A}_{1\alpha}+\overline{A}_{2\alpha}+\overline{a}_{*\alpha}))^{1/2}, \quad \overline{v}_{2ag\alpha} = (2/(\underline{A}_{1\alpha}+\underline{A}_{2\alpha}+\underline{a}_{*\alpha}))^{1/2};$$

$$\underline{\vartheta}_{1ag\alpha} = \inf_{a_*\in[\underline{a}_{*\alpha},\overline{a}_{*\alpha}]} \underline{A}_{3\alpha}(a_*-\overline{b}_{*\alpha})(2a_*(2(\overline{A}_{1\alpha}+\overline{A}_{2\alpha}-a_*))^{1/2})^{-1},$$

$$\overline{\vartheta}_{1ag\alpha} = \sup_{a_*\in[\underline{a}_{*\alpha},\overline{a}_{*\alpha}]} \overline{A}_{3\alpha}(a_*-\underline{b}_{*\alpha})(2a_*(2(\underline{A}_{1\alpha}+\underline{A}_{2\alpha}-a_*))^{1/2})^{-1};$$

$$\underline{\vartheta}_{2ag\alpha} = \inf_{a_*\in[\underline{a}_{*\alpha},\overline{a}_{*\alpha}]} \underline{A}_{3\alpha}(a_*+\underline{b}_{*\alpha})(2a_*(2(\overline{A}_{1\alpha}+\overline{A}_{2\alpha}+a_*))^{1/2})^{-1},$$

$$\overline{\vartheta}_{2ag\alpha} = \sup_{a_*\in[\underline{a}_{*\alpha},\overline{a}_{*\alpha}]} \overline{A}_{3\alpha}(a_*+\overline{b}_{*\alpha})(2a_*(2(\underline{A}_{1\alpha}+\underline{A}_{2\alpha}+a_*))^{1/2})^{-1}.$$

В соотношениях разрабатываемого алгоритма для расчета $\tilde{v}_g(\omega)$ и $\tilde{\vartheta}_g(\omega)$ рассматриваются неявные детерминистические функциональные зависимости

$$\vartheta_* = F_j^{-1}(\omega, A_1, A_2, A_3, A_4),$$

отвечающие трем версиям нелинейных уравнений (11) относительно параметра ϑ, а также соотношения (10)

$$k = \Phi_j(\vartheta_*,\ \omega, A_1, A_2, A_3, A_4),$$

которые при нечетко-множественном обобщении приводят к представлениям

$$\tilde{\vartheta}_g(\omega) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{\vartheta}_{*g\alpha}(\omega), \overline{\vartheta}_{*g\alpha}(\omega)], \quad \tilde{v}_g(\omega) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{v}_{g\alpha}(\omega), \overline{v}_{g\alpha}(\omega)], \tag{26}$$

$$\underline{\vartheta}_{*g\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{A_1\in[\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}] \\ A_2\in[\underline{A}_{2\alpha}, \overline{A}_{2\alpha}] \\ A_3\in[\underline{A}_{3\alpha}, \overline{A}_{3\alpha}] \\ A_4\in[\underline{A}_{4\alpha}, \overline{A}_{4\alpha}]}} F_j^{-1}(\omega, A_1, A_2, A_3, A_4),$$

$$\overline{\vartheta}_{*g\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{A_1\in[\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}] \\ A_2\in[\underline{A}_{2\alpha}, \overline{A}_{2\alpha}] \\ A_3\in[\underline{A}_{3\alpha}, \overline{A}_{3\alpha}] \\ A_4\in[\underline{A}_{4\alpha}, \overline{A}_{4\alpha}]}} F_j^{-1}(\omega, A_1, A_2, A_3, A_4);$$

$$\underline{v}_{g\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{A_1\in[\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}] \\ A_2\in[\underline{A}_{2\alpha}, \overline{A}_{2\alpha}] \\ A_3\in[\underline{A}_{3\alpha}, \overline{A}_{3\alpha}] \\ A_4\in[\underline{A}_{4\alpha}, \overline{A}_{4\alpha}] \\ \vartheta_*\in[\underline{\vartheta}_{*g\alpha}, \overline{\vartheta}_{*g\alpha}]}} \{\omega/\Phi_j(\vartheta_*,\ \omega, A_1, A_2, A_3, A_4)\},$$

$$\overline{v}_{g\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{A_1\in[\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}] \\ A_2\in[\underline{A}_{2\alpha}, \overline{A}_{2\alpha}] \\ A_3\in[\underline{A}_{3\alpha}, \overline{A}_{3\alpha}] \\ A_4\in[\underline{A}_{4\alpha}, \overline{A}_{4\alpha}] \\ \vartheta_*\in[\underline{\vartheta}_{*g\alpha}, \overline{\vartheta}_{*g\alpha}]}} \{\omega/\Phi_j(\vartheta_*,\ \omega, A_1, A_2, A_3, A_4)\}.$$

При численной реализации описанных расчетных алгоритмов осуществляется дискретизация разложений по множествам α – уровня, и шаг варьирования параметра α выбирается исходя из соображений получения практически значимого описания функций принадлежности для анализируемых неконтрастных характеристик процессов волнового термоупругого деформирования.

Заключение. Результатом представленных в работе исследований является осуществленная разработка алгоритма получения нечетко-множественных оценок влияния погрешностей в задании исходных параметров, связанных с разбросами экспериментальных данных и технологическими проектными допусками на результаты применения классической и учитывающей релаксацию теплового потока гиперболической расчетных моделей определения скоростей связанных термоупругих волн. Алгоритм основывается на переходе в функциональных соотношениях для расчета исследуемых скоростей в рамках детерминистических версий соответствующих моделей к описывающим неконтрастность экзогенных характеристик нечетко-множественным параметрам-аргументам с фрагментированным использованием арифметики нечетких величин и модифицированной альфа-уровневой формы эвристического принципа расширения. Получены расчетные соотношения для характеристик рассматриваемых моделей.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4- 1.1.2;2.3.1).

1. *Magunov A.N.* Laser thermometry of solids: state of the art and problems / A.N. Magunov // Measurement Techniques. – 2002. – V. 45, N 2. – P. 173–181.
2. *Шашков А.Г.* Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход / А.Г. Шашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яновский. – М.: УРСС, 2004 – 289 с.
3. *Bargmann S.* Theoretical and computational aspects of non-classical thermoelasticity / S. Bargmann, P. Steinmann // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2006. – V. 196. – P. 516–527.
4. *Ignaczak J.* Thermoelasticity with Finite Wave Speeds / J. Ignaczak, M. Ostoja-Starzewski. – Oxford: OUP, 2009. – 413 p.
5. *Poletkin K.V.* Ultrafast heat transfer on nanoscale in thin gold films / K.V. Poletkin, G.G. Gurzadyan, J. Shang, V. Kulish // Appl. Phys. B. – 2012. – V. 107. – P. 137–143.
6. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
7. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
8. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий/ – М.: Мир, 1970. – 256 с.
9. *Коваленко А.Д.* Термоупругость / А.Д. Коваленко. – К.: Вища школа, 1975. – 215 с.
10. *Бабенков М.Б.* Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока / М.Б. Бабенков // ПМТФ. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 126–137.
11. *Витохин Е.Ю.* Численное и аналитическое исследование распространения термоупругих волн в среде с учетом релаксации теплового потока / Е.Ю. Витохин, М.Б. Бабенков // ПМТФ. – 2016. – Т. 57, № 3. – С. 171–185.
12. *Номбре С.Б.* Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра / С.Б Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 4 (81). – С. 63–76. – doi:10.24412/0136-4545-2022-4-63-76. – EDN TOGBNE.

A.S. Goltsev, S.B. Nombre, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev

Accounting of parametric uncertainty when calculating thermoelastic waves speed.

The development of an algorithm for obtaining fuzzy-set estimates of the influence of errors in setting the initial parameters associated with scatters in experimental data and technological design tolerances on the results of applying classical and hyperbolic calculation models that take into account the relaxation of heat flow for determining the velocities of coupled thermoelastic waves is presented. A technique is applied, which is based on the transition in functional relationships for calculating the studied rates within the framework of deterministic versions of the corresponding models, to fuzzy-set parameters-arguments describing the non-contrast of exogenous characteristics with fragmented use of arithmetic of fuzzy quantities and a modified alpha-level form of the heuristic principle of expansion. Calculation relations for the main non-contrast characteristics of the models under consideration are obtained.

Keywords: *thermoelastic waves, models for calculating velocities, scatter of initial parameters, errors in experimental data, technological tolerances, fuzzy set accounting of uncertainty, fuzzy calculation apparatus, heuristic generalization principle.*

Получено 10.10.2023