МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38; 531.39
doi:10.24412/0136-4545-2024-2-5-17
EDN:BDPNVF

©2024. **А.В. Зыза**[1], **Р.Н. Нескородев**[2]

О НОВЫХ РЕШЕНИЯХ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО КЛАССА КОНОСЕВИЧА-ПОЗДНЯКОВИЧА ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

В статье исследованы условия существования частных решений полиномиальной структуры класса Коносевича-Поздняковича для дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Найдены новые случаи интегрируемости в указанной задаче.

Ключевые слова: *гиростат, эффект Барнетта-Лондона, полиномиальные решения, инвариантные соотношения, первые интегралы.*

Введение. Классическая задача о движении твердого тела с одной неподвижной точкой в поле силы тяжести имеет различные обобщения [1, 2]. Одним из них является задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [3]. Исследования в этой области непосредственно обусловлены усовершенствованием бесконтактных подвесов быстровращающихся гироскопов, используемых в современной технике; конструированием высокоскоростных поездов; созданием приборов, работающих в сильных магнитных полях.

Математической моделью указанной задачи о движении гиростата является система, содержащая шесть дифференциальных уравнений с двадцатью

[1] *Зыза Александр Васильевич* – док. физ.-мат. наук, профессор каф. высшей математики и методики преподавания математики ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: z9125494@mail.ru.

Zyza Alexander Vasilievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics.

[2] Нескородев Роман Николаевич – док. физ.-мат. наук, профессор каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nromn72@mail.ru.

Neskorodev Roman Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

параметрами, которая, в отличие от уравнений Эйлера-Пуассона и Кирхгофа-Пуассона, допускает только два первых интеграла [3]. Задача Коши для этих дифференциальных уравнений имеет решение, но получить конструктивное решение для всего множества параметров невозможно, так как при произвольных значениях параметров уравнения такого движения неинтегрируемы в квадратурах [4]. Поэтому изучение свойств движения твердого тела и гиростата с неподвижной точкой может быть основано либо на построении частных решений, либо на численном интегрировании с помощью компьютерных средств [4–6].

Актуальность построения частных решений в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона также заключаются в том, что наличие таких решений дает возможность с помощью первого метода Ляпунова проводить анализ их окрестности в фазовом пространстве дифференциальных уравнений динамики гиростата, устанавливая, например, хаотический, либо регулярный характер поведения интегральных кривых [3].

Полиномиальные классы частных решений уравнений движения гиростата в различных силовых полях относятся к наиболее изученным. Так, например, в задачах о движении твердого тела и гиростата под действием силы тяжести полиномиальные решения получены В.А. Стекловым, Н. Ковалевским, Д.Н. Горячевым, С.А. Чаплыгиным, П.В. Харламовым, Е.И. Харламовой, Г.В. Мозалевской, А.И. Докшевичем, Б.И. Коносевичем, Е.В. Поздняковичем [2, 7]. Все они отвечают случаю, когда центры масс твердого тела, имеющего неподвижную точку, и гиростата с неподвижной точкой лежат на главной оси эллипсоида инерции. В таком же предположении построены решения различных полиномиальных классов и для уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [8–11].

В данной статье начато исследование условий существования решений полиномиальной структуры класса Коносевича-Поздняковича в указанной задаче динамики гиростата. Построены новые решения рассматриваемого полиномиального класса, которые описываются эллиптическими и гиперэллиптическими функциями времени.

1. Постановка задачи. Преобразование уравнений движения. Рассмотрим движения гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, суть которого состоит в следующем. При вращении первоначально ненамагниченного ферромагнетика в магнитном поле происходит его намагничивание вдоль оси вращения, которая линейно зависит от угловой скорости ω ($\boldsymbol{B} = B\omega$), где B - симметричный тензор третьего порядка (эффект Барнетта) [12]. Эффект Лондона [13] относится к явлению, имеющему место при вращении ненамагниченного сверхпроводящего твердого тела в магнитном поле. В обоих случаях формулы для магнитного момента одинаковы, несмотря на то, что механизм намагничивания обусловлен различными физическими причинами. В указанных случаях магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем стремится по направлению к вектору напряженности постоянного магнитного поля, что приводит к прецессии векто-

ра кинетического момента тела вокруг вектора поля [14].

При математическом моделировании движения гиростата в магнитном поле необходимо учитывать магнитный момент, обусловленный эффектом Барнетта-Лондона. Это обстоятельство приводит к тому, что дифференциальные уравнения указанного движения, в отличие от уравнений классической задачи динамики [1, 2] и уравнений класса Кирхгофа [3, 4], не допускают интеграл энергии. Это происходит из-за диссипации энергии – «перекачки» энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращательного движений гиростата. Поэтому введение дополнительного первого интеграла, предложенного в [15, 16], недостаточно для интегрирования уравнений такого движения гиростата, так как к ним не применима теория интегрирующего множителя Якоби [1, 4].

Уравнения движения гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона и момента ньютоновских сил в векторном виде таковы [3, 15, 16]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Первые интегралы уравнений (1) имеют вид

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k_0. \tag{2}$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})^{\cdot} = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

В уравнениях (1)–(3) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – орт, характеризующий направление постоянного магнитного поля; $\mathbf{s} = (s_1, 0, 0)$ – вектор обобщенного центра масс; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0)$ – гиростатический момент; $A = diag\,(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата в неподвижной точке; $B = diag\,(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая магнитный момент $\boldsymbol{B} = B \cdot \boldsymbol{\omega}$; $C = diag\,(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, которая характеризует ньютоновское притяжение гиростата неподвижным центром; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную; k_0 – постоянная интеграла площадей.

Если для динамического уравнения из (1) имеет место равенство $B = \delta \cdot E$ (E – единичная матрица, δ – параметр), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнений (1). Тогда эти уравнения по своей структуре совпадут с уравнениями Кирхгофа-Пуассона задачи о движении гиростата в поле действия потенциальных и гироскопических сил. Поэтому полученные в этом случае результаты для уравнений (1) следует сопоставлять с результатами [3].

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (1) решений класса Коносевича-Поздняковича [10]:

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} b_i \sigma^i, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^{m} c_j \sigma^j, \tag{4}$$

$$\nu_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{i=0}^{l} a_i \sigma^i, \quad \nu_2 = \psi(\sigma)\sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3 = \kappa(\sigma)\sqrt{R(\sigma)},$$

$$\psi(\sigma) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, \quad \kappa(\sigma) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j,$$

где n, m, l, n_1, m_1 – целые неотрицательные числа; коэффициенты b_i, c_j, a_i, g_i, f_j – подлежащие определению параметры. Указанный класс решений (4) характеризуется квадратичным инвариантным соотношением по вспомогательной переменной δ. Этим классом описывается решение Коносевича-Поздняковича классической задачи динамики твердого тела [2] и решение Харламовой-Мозалевской задачи о движении тяжелого гиростата [7].

Преобразуем уравнения (1) и геометрический интеграл из (2) при помощи соотношений (4):

$$\Phi(\sigma) = (\psi(\sigma) - \kappa(\sigma))\left(\varphi'(\sigma)\right)^{-1}; \tag{5}$$

$$\dot{\sigma} = \Phi(\sigma)\sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}; \tag{6}$$

$$\left(Q(\sigma)\psi^2(\sigma)\right)' \Phi(\sigma) = 2\psi(\sigma)\left(\sigma^2\kappa(\sigma) - \varphi(\sigma)\right),$$

$$\left(R(\sigma)\kappa^2(\sigma)\right)' \Phi(\sigma) = 2\kappa(\sigma)\left(\varphi(\sigma) - \sigma^2\varphi(\sigma)\right); \tag{7}$$

$$2\sigma A_1 \Phi(\sigma) = (C_3 - C_2)\psi(\sigma)\kappa(\sigma) + B_2\kappa(\sigma) - B_3\psi(\sigma) + (A_2 - A_3); \tag{8}$$

$$A_2 Q'(\sigma)\Phi(\sigma) = 2\left[(C_1 - C_3)\kappa(\sigma)\varphi(\sigma) - \kappa(\sigma)\left(B_1\sigma^2 + s_1\right) + \right.$$
$$\left. + B_3\varphi(\sigma) - \lambda_1 + (A_3 - A_1)\sigma^2\right], \tag{9}$$

$$A_3 R'(\sigma)\Phi(\sigma) = 2\left[(C_2 - C_1)\psi(\sigma)\varphi(\sigma) + \psi(\sigma)\left(B_1\sigma^2 + s_1\right) - \right.$$
$$\left. - B_2\varphi(\sigma) + \lambda_1 + (A_1 - A_2)\sigma^2\right];$$

$$\varphi^2(\sigma) - 1 + Q(\sigma)\psi^2(\sigma) + R(\sigma)\kappa^2(\sigma) = 0. \tag{10}$$

В уравнениях (5), (7), (9) штрихом обозначено дифференцирование по переменной σ. Если функции $Q(\sigma)$, $R(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$, $\kappa(\sigma)$ определены, то зависимость $\sigma = \sigma(t)$ от времени устанавливаем из дифференциального уравнения (6).

2. Варианты значений степеней полиномов решения (4). Общая система условий на параметры задачи и решения (4).

Первостепенной задачей в исследовании условий существования решений различных полиномиальных структур уравнений движения твердого тела и гиростата является задача об определении максимальных значений степеней полиномов. Она решается путем рассмотрения редуцированных уравнений в виде многочленов правой и левой частей этих уравнений и требованием равенства максимальных степеней данных многочленов.

В результате таких действий и дальнейшего анализа, считая линейными по σ алгебраические многочлены $\psi(\sigma)$, $\kappa(\sigma)$ из (4), установлены наиболее важные

для динамики гиростата варианты значений степеней полиномов в решении (4). Полагая $\deg Q = n$, $\deg R = m$, $\deg \varphi = l$, $\deg \psi = n_1$, $\deg \kappa = m_1$, укажем эти варианты:

Таблица 1. Варианты значений степеней многочленов

№ варианта	n	m	l	n_1	m_1
1	2	4	2	1	0
2	3	3	1	1	1
3	2	2	1	1	1

Для дальнейшего изучения вариантов таблицы 1 запишем систему условий на параметры задачи и решения, считая $n = 3$, $m = 4$, $l = 2$, $n_1 = 1$, $m_1 = 1$. Тогда алгебраические многочлены решения (4) таковы:

$$Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \quad R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0,$$

$$\varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \psi(\sigma) = g_1\sigma + g_0, \quad \kappa(\sigma) = f_1\sigma + f_0. \tag{11}$$

Подставим полином из (11) в уравнения (7)–(9) и интеграл (10). Требование того, чтобы полученные равенства были тождествами по σ, приводит к системе алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (4), (11):

$$a_2d_2 = 0, \quad 2A_1(g_1 - f_1) - 2a_2d_1 - a_1d_2 = 0, \quad 2A_1(g_0 - f_0) - 2a_2d_0 - a_1d_1 = 0,$$

$$a_1d_0 = 0, \quad \gamma_3d_2 = 0, \quad \gamma_3d_1 + \gamma_2d_2 - 4A_1f_1 = 0,$$

$$\gamma_3d_0 + \gamma_2d_1 + \gamma_1d_2 + 4A_1(a_2 - f_0) = 0, \quad \gamma_2d_0 + \gamma_1d_1 + \gamma_0d_2 + 4A_1a_1 = 0,$$

$$\gamma_1d_0 + \gamma_0d_1 + 4A_1a_0 = 0, \quad \gamma_0d_0 = 0, \quad \delta_4d_2 = 0,$$

$$\delta_4d_1 + \delta_3d_2 = 0, \quad \delta_4d_0 + \delta_3d_1 + \delta_2d_2 + 4A_1g_1 = 0,$$

$$\delta_3d_0 + \delta_2d_1 + \delta_1d_2 + 4A_1(a_2 - g_0) = 0, \quad \delta_2d_0 + \delta_1d_1 + \delta_0d_2 - 4A_1a_1 = 0,$$

$$\delta_1d_0 + \delta_0d_1 - 4A_1a_0 = 0, \quad \delta_0d_0 = 0,$$

$$3A_2b_3d_2 - 4A_1(\beta a_2 - B_1)f_1 = 0, \tag{12}$$

$$A_2(2b_2d_2 + 3b_3d_1) - 4A_1((a_2f_0 + a_1f_1)\beta - B_1f_0 + B_3a_2 + A_3 - A_1) = 0,$$

$$A_2(b_1d_2 + 2b_2d_1 + 3b_3d_0) - 4A_1((a_1f_0 + a_0f_1)\beta + B_3a_1 - f_1s_1) = 0,$$

$$A_2(b_1d_1 + 2b_2d_0) - 4A_1((B_3 + f_0\beta)a_0 - f_0s_1 - \lambda_1) = 0, \quad b_1d_0 = 0,$$

$$c_4d_2 = 0, \quad A_3(4c_4d_1 + 3c_3d_2) + 4A_1((\alpha + \beta)a_2 - B_1)g_1 = 0,$$

$$A_3(4c_4d_0 + 3c_3d_1 + 2A_2d_2) +$$

$$+4A_1((\alpha + \beta)(a_2g_0 + a_1g_1) - B_1g_0 + B_2a_2 + A_2 - A_1) = 0,$$

$$A_3(3c_3d_0 + 2A_2d_1 + c_1d_2) + 4A_1((\alpha + \beta)(a_1g_0 + a_0g_1) - g_1s_1 + B_2a_1) = 0,$$

$$A_3\left(2A_2d_0+c_1d_1\right)+4A_1\left(\left(\alpha+\beta\right)a_0g_0-g_0s_1+B_2a_0-\lambda_1\right)=0,\quad c_1d_0=0,$$
$$a_0^2+b_0g_0^2+c_0f_0^2-1=0.$$

Здесь

$$\alpha=C_3-C_2,\quad \beta=C_1-C_3,$$
$$d_2=\alpha g_1f_1,\quad d_1=\alpha\left(g_1f_0+g_0f_1\right)+B_2f_1-B_3g_1,$$
$$d_0=\alpha g_0f_0+B_2f_0-B_3g_0+A_2-A_3,$$
$$\gamma_3=5b_3g_1,\quad \gamma_2=3b_3g_0+4b_2g_1,\quad \gamma_1=2b_2g_0+3b_1g_1,\quad \gamma_0=b_1g_0+2b_0g_1,$$
$$\delta_4=6c_4f_1,\quad \delta_3=4c_4f_0+5c_3f_1,\quad \delta_2=3c_3f_0+4c_2f_1,$$
$$\delta_1=2c_2f_0+3c_1f_1,\quad \delta_0=c_1f_0+2c_0f_1.$$

3. Первое новое частное решение. Рассмотрим первый вариант из таблицы 1. Для этого варианта алгебраические многочлены решения (4) имеют вид

$$Q\left(\sigma\right)=b_2\sigma^2+b_1\sigma+b_0,\quad R\left(\sigma\right)=c_4\sigma^4+c_3\sigma^3+c_2\sigma^2+c_1\sigma+c_0,$$
$$\varphi\left(\sigma\right)=a_2\sigma^2+a_1\sigma+a_0,\quad \psi\left(\sigma\right)=g_1\sigma+g_0,\quad \kappa\left(\sigma\right)=f_0. \tag{13}$$

Значения коэффициентов указанных в (13) полиномов получим из условия совместности системы уравнений (12) при $b_3=0$ и $f_1=0$. Считая свободными параметрами A_2, A_3, B_2, B_3, g_1, f_0, запишем решение этой системы:

$$A_1=A_3,\quad \alpha=\frac{3\mu_1B_3f_0+\mu_0A_3}{3\mu_1f_0^2},$$
$$\beta=-\frac{\mu_0A_2A_3+6\mu_1\mu_2B_3f_0}{6\mu_1\mu_2f_0^2},\quad B_1=-\frac{A_2A_3}{2\mu_2f_0},$$
$$a_2=\frac{3\mu_1f_0}{\mu_0},\quad a_1=-\frac{6\mu_1\mu_2\mu_3f_0^2}{\mu_0^2g_1A_3},$$
$$a_0=-\frac{1}{\mu_0^3\mu_4\left(g_1A_3\right)^2}\left[3\mu_1^2\mu_3\left(\left(14A_3-9A_2\right)A_2B_2^2f_0^2+4\left(9A_2^3-50A_2^2A_3+\right.\right.$$
$$\left.\left.+87A_2A_3^2-48A_3^3\right)B_2f_0+A_2\left(45A_2^3-196A_2^2A_3+285A_2A_3^2-138A_3^3\right)\right)f_0^3\right],$$
$$b_2=\frac{6\mu_1\mu_3f_0^2}{\left(\mu_0g_1\right)^2},\quad b_1=\frac{12\mu_1^2\mu_3\left(\mu_3+3\left(2A_2-3A_3\right)\right)f_0^3}{\left(\mu_0g_1\right)^3A_3},$$
$$b_0=\frac{1}{\left(\mu_0^2g_1^2A_3\right)^2\mu_4}\left[18\mu_1^3\mu_3\left(\mu_2\left(B_2f_0\right)^3+\left(15A_2^2-40A_2A_3+28A_3^2\right)\left(B_2f_0\right)^2+\right.\right.$$
$$+\left(A_2-A_3\right)\times\left(57A_2^2-155A_2A_3+108A_3^2\right)B_2f_0+45A_2^4-$$
$$\left.\left.-140A_2^3A_3+73\left(A_2A_3\right)^2+126A_2A_3^3-108A_3^4\right)f_0^4\right],$$

$$c_4 = -\frac{3\mu_1}{\mu_0}, \quad c_3 = \frac{12\mu_1^2\mu_3 f_0}{\mu_0^2 g_1 A_3}, \quad c_2 = -\frac{36\mu_1^2\mu_2\mu_3 f_0^2}{\mu_0^3 g_1^2 A_3},$$

$$c_1 = \frac{12\mu_1 A_1 a_0}{\mu_0 g_1 A_3}, \quad c_0 = \frac{1}{f_0^2}\left(1 - a_0^2 - b_0 g_0^2\right), \quad g_0 = -\frac{3\mu_1\left(\mu_3 - A_3\right) f_0}{\mu_0 A_3}, \tag{14}$$

$$s_1 = -\frac{1}{2\mu_0^2\mu_2\mu_4 g_1^2 A_3}\Big[\mu_1\mu_3\Big(\left(9A_2^2 - 2A_2A_3 - 16A_3^2\right) A_2\left(B_2 f_0\right)^2 -$$

$$-2\left(45A_2^3 - 301A_2^2A_3 + 574A_2A_3^2 - 336A_3^3\right) A_2 B_2 f_0 + 225A_2^5 - 2060A_2^4A_3 +$$

$$+7769A_2^3A_3^2 - 14466A_2^2A_3^3 + 13104A_2A_3^4 - 4608A_3^5\Big) f_0\Big],$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{\mu_0^2\mu_4 g_1^2 A_3}\Big[\mu_1^2\mu_3\Big(-A_2\left(B_2 f_0\right)^2 + 2A_2\left(7A_3 - 5A_2\right) B_2 f_0 +$$

$$+15A_2^3 - 94A_2^2A_3 + 171A_2A_3^2 - 96A_3^3\Big) f_0^2\Big].$$

Здесь

$$\mu_0 = 2B_2 f_0 + 5A_2 - 6A_3, \quad \mu_1 = A_2 - 2A_3, \quad \mu_2 = 3A_2 - 4A_3,$$

$$\mu_3 = B_2 f_0 + A_2, \quad \mu_4 = B_2 f_0 \mu_2 + 4\left(2A_2 - 3A_3\right) A_3.$$

Зависимость вспомогательной переменной σ от времени получим из дифференциального уравнения (6)

$$\dot{\sigma} = \frac{d_1}{2A_1}\sqrt{\left(b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0\right)\left(c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0\right)}. \tag{15}$$

Приведем числовой пример решения (4), (13)–(15) уравнений (1).
Пусть $a > 0$, $b > 0$ и

$$A_1 = A_3 = a, \quad A_2 = \frac{9}{10}a, \quad B_1 = -\frac{3}{26}b, \quad B_2 = 5b, \quad B_3 = -2b,$$

$$C_3 - C_2 = \frac{19b^2}{11a}, \quad C_1 - C_3 = -\frac{257b^2}{858a},$$

$$\mathbf{s} = \left(\frac{14237663b^2}{187278000a},\ 0,\ 0\right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{15019367b}{84035000},\ 0,\ 0\right), \tag{16}$$

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = \frac{1034b}{60025a}\sigma^2 + \frac{671066b^{3/2}}{73530625a^{3/2}}\sigma + \frac{10595466761}{2522100437500}\frac{b^2}{a^2}, \tag{17}$$

$$\omega_3^2 = R(\sigma) = -\frac{11}{105}\sigma^4 + \frac{11374b^{1/2}}{128625a^{1/2}}\sigma^3 + \frac{147862b}{31513125a}\sigma^2 +$$

$$+\frac{2792982379b^{3/2}}{540450093750a^{3/2}}\sigma + \frac{77678379266064182 11b^2}{77857240505625\cdot 10^6 a^2},$$

$$\nu_1 = -\frac{11a}{35b}\sigma^2 + \frac{6721a^{1/2}}{42875b^{1/2}}\sigma + \frac{253907489}{2941225000},$$

$$\nu_2 = \left(\frac{7a^{3/2}}{b^{3/2}}\sigma - \frac{1661a}{350b}\right)\sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3 = -\frac{3a}{b}\sqrt{R(\sigma)}.$$

Так как зависимость $\sigma = \sigma(t)$ находится из уравнения

$$\dot{\sigma} = -\frac{245a^{1/2}}{22b^{1/2}}\sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}, \tag{18}$$

то действительнозначность решения (17), (18), при значениях параметров задачи (16), вытекает из условия, что подкоренные функции $Q(\sigma)$, $R(\sigma)$ при $\sigma = 0$ – положительны. При этом $\sigma(t)$ – функция времени, полученная в результате обращения гиперэллиптического интеграла, вытекающего из (18).

Приведенный пример (16)–(18) характеризуется двумя произвольными положительными параметрами a и b. Зависимость всех переменных задачи от времени устанавливается подстановкой $\sigma = \sigma(t)$ в равенства (17).

Построенное решение (16)–(18) можно характеризовать как решение с одним линейным инвариантным соотношением вида

$$h(\omega_3,\ \nu_3) = \omega_3 - \nu_3 f_0^{-1} = 0,$$

производная которого в силу уравнений (1) характеризуется условием

$$\left.\frac{dh(\omega_3,\ \nu_3)}{dt}\right|_{h(\omega_3,\ \nu_3)=0} \neq 0.$$

4. Второе новое частное решение. Перейдем к исследованию второго варианта из таблицы 1. Для этого варианта многочлен решения (4) таковы

$$Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \quad R(\sigma) = c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0,$$

$$\varphi(\sigma) = a_1\sigma + a_0, \quad \psi(\sigma) = g_1\sigma + g_0, \quad \kappa(\sigma) = f_1\sigma + f_0. \tag{19}$$

Для нахождения коэффициентов многочленов (19) решения (4) и параметров рассматриваемой задачи исследуем на совместимость систему алгебраических уравнений (12) при $c_4 = 0$, $a_2 = 0$.

Указанная система разрешима относительно независимых параметров A_1, B_2, B_3, f_0, и ее решение таково:

$$\alpha = 0, \quad B_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad A_2 = A_3, \quad g_0 = \frac{B_2 f_0}{B_3}, \quad A_3 = \frac{5}{2}A_1,$$

$$a_1 = \frac{2A_1 f_0}{B_3 g_1}, \quad a_0 = \frac{(B_2 + B_3)A_1 f_0^2}{2(g_1 B_3)^2}, \quad f_1 = g_1,$$

$$b_3 = \frac{4A_1}{5\eta_0 g_1}, \quad b_2 = -\frac{\eta_1 A_1 f_0}{5\eta_0 g_1^2 B_3},$$

$$b_1 = \frac{2(\eta_1 B_2 f_0 - 20A_1 B_3)A_1 f_0}{15\eta_0 g_1^3 B_3^2}, \tag{20}$$

$$b_0 = \frac{\left(-\eta_1 B_2^2 f_0 + 5A_1 B_3 \left(B_2 - 3B_3\right)\right) A_1 f_0^2}{15\eta_0 g_1^4 B_3^3},$$

$$c_3 = -\frac{4A_1}{5\eta_0 g_1}, \quad c_2 = -\frac{\eta_2 A_1 f_0}{5\eta_0 g_1^2 B_3},$$

$$c_1 = \frac{2\left(\eta_2 f_0 + 20A_1\right) A_1 f_0}{15\eta_0 g_1^3 B_3}, \quad c_0 = \frac{\left(-\eta_2 B_3 f_0 + 5A_1 \left(3B_2 - B_3\right)\right) A_1 f_0^2}{15\eta_0 \left(g_1^2 B_3\right)^2},$$

$$s_1 = \frac{3\left(B_2 + B_3\right) A_1 f_0}{4g_1^2 B_3}, \quad \lambda_1 = -\frac{\left(\left(3B_2^2 - 2B_2 B_3 + 3B_3^2\right) f_0 - 20A_1 B_3\right) A_1 f_0}{12\left(g_1 B_3\right)^2},$$

$$g_1 = \left[\frac{5\left(7B_2^2 - 2B_2 B_3 + 7B_3^2\right) B_3 \left(A_1 f_0^2\right)^2 - 4\eta_0^2 \left(3B_2^2 + 4B_2 B_3 + 3B_3^2\right) A_1 f_0^5}{60B_3^5}\right]^{1/4}.$$

Здесь

$$\eta_0 = B_2 - B_3, \quad \eta_1 = 3B_2 - 5B_3, \quad \eta_2 = 5B_2 - 3B_3.$$

Зависимость $\sigma = \sigma(t)$ установим из уравнения (6)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\eta_0 g_1}{2A_1}\sqrt{\left(c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0\right)\left(b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0\right)}. \tag{21}$$

Приведем числовой пример действительности решения (4), (19), (21) при выполнении условий (20).

Пусть

$$A_1 = a, \quad B_2 = -2b, \quad B_3 = 3b, \quad f_0 = -\frac{5a}{b}, \quad (a > 0, \ b > 0). \tag{22}$$

Тогда из условий (20) имеем:

$$A_2 = A_3 = \frac{5}{2}a, \quad C_1 = C_2 = C_3, \quad B_1 = 0, \tag{23}$$

$$\mathbf{s} = \left(-\frac{5a^2}{4bg_1^2}, \ 0, \ 0\right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{175a^3}{12\left(bg_1\right)^2}, \ 0, \ 0\right);$$

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = -\frac{4a}{25bg_1}\sigma^3 + \frac{7a^2}{5\left(bg_1\right)^2}\sigma^2 - \frac{4a^3}{\left(bg_1\right)^3}\sigma + \frac{65a^4}{\left(bg_1\right)^4}, \tag{24}$$

$$\omega_3^2 = R(\sigma) = \frac{4a}{25bg_1}\sigma^3 + \frac{19a^2}{15\left(bg_1\right)^2}\sigma^2 + \frac{46a^3}{9\left(bg_1\right)^3}\sigma + \frac{110a^4}{9\left(bg_1\right)^4},$$

$$\nu_1 = -\frac{10a^2}{3b^2 g_1}\sigma + \frac{25a^3}{18b^3 g_1^2}, \quad \nu_2 = \left(g_1\sigma + \frac{10a}{3b}\right)\sqrt{Q(\sigma)},$$

$$\nu_3 = \left(g_1\sigma - \frac{5a}{b}\right)\sqrt{R(\sigma)}.$$

Здесь

$$g_1 = \sqrt[4]{\frac{41875}{108}} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}.$$

Вспомогательная переменная $\sigma = \sigma(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\sigma} = -\frac{5g_1 b}{2a}\sqrt{Q(\sigma)\,R(\sigma)} \tag{25}$$

при $\sigma \in \left[-\frac{9a}{2bg_1};\ \frac{21a}{4bg_1}\right]$.

Следовательно, согласно (25), решение (24) с параметрами задачи (22), (23), представимо в виде квадратур. Оно содержит два свободных положительных параметра a, b и описывается гиперэллиптическими функциями времени.

5. Третье новое частное решение. Для изучения третьего варианта таблицы 1 запишем решение (4) дифференциальных уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона (5)–(9)

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0,$$

$$\nu_1 = a_1\sigma + a_0, \quad \nu_2 = (g_1\sigma + g_0)\sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3 = (f_1\sigma + f_0)\sqrt{R(\sigma)}. \tag{26}$$

Значения коэффициентов многочленов в решении (26) и параметров исследуемой задачи получим из системы алгебраических уравнений (12), в качестве свободных параметров которой выберем A_1, A_3, α, f_0. Считая $b_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_3 = 0$, $a_2 = 0$, запишем решение указанной системы

$$a_1 = \frac{\xi_1}{\alpha f_1}, \quad a_0 = 0, \quad g_1 = -\frac{2A_1 f_1}{\xi_0}, \quad g_0 = f_0,$$

$$b_2 = \frac{\xi_0^2}{4\alpha A_1 f_1^2}, \quad b_1 = \frac{\xi_0^2\xi_3 f_0}{4\alpha A_1^2 f_1^3}, \quad b_0 = \frac{\left(\xi_0\xi_3\alpha f_0^2 - 8\xi_1 A_1^2\right)\xi_0^2}{16\alpha^2 A_1^3 f_1^4}, \tag{27}$$

$$c_2 = -\frac{A_1}{\alpha f_1^2}, \quad c_1 = \frac{2(\xi_2 + A_1) f_0}{\alpha f_1^3}, \quad c_0 = -\frac{\xi_0\xi_1 + (\xi_2 + A_1)\alpha f_0^2}{\left(\alpha f_1^2\right)^2},$$

$$\beta = -\frac{\xi_3\alpha}{\xi_1}, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = -\frac{\xi_0^2\alpha f_0^2 + 2\xi_1\xi_2 A_1}{\xi_0\xi_1 f_0},$$

$$B_3 = \frac{2A_1\alpha f_0^2 + \xi_1\xi_2}{\xi_1 f_0}, \quad A_2 = \frac{4(5A_1 - 2A_3)A_1}{\xi_0},$$

$$s_1 = \frac{\left(16A_1^2 - 11A_1A_3 + 2A_3^2\right)\alpha f_0^2 + 2\xi_1\xi_2 A_1}{2\alpha A_1 f_1^2 f_0}, \quad \lambda_1 = -s_1 f_0,$$

$$f_1 = \left[\left(\frac{\left(\xi_0\xi_3\alpha f_0^2 - 8\xi_1 A_1^2\right)\xi_0^2}{16\alpha^2 A_1^3} - \frac{\xi_0\xi_1 + (\xi_2 + A_1)\alpha f_0^2}{\alpha^2}\right) f_0^2\right]^{1/4}.$$

Здесь

$$\xi_0 = 8A_1 - 3A_3, \quad \xi_1 = 10A_1 - 3A_3, \quad \xi_2 = 2A_1 - A_3, \quad \xi_3 = 4A_1 - A_3.$$

Зависимость вспомогательной переменной σ от времени в решении (26) устанавливаем используя дифференциальное уравнение, полученное из (6):

$$\dot{\sigma} = \frac{d_2\sigma}{2A_1}\sqrt{Q(\sigma)\,R(\sigma)}, \quad d_2 = -\frac{2\alpha A_1 f_1^2}{\xi_0}. \tag{28}$$

Приведем численный пример действительности решения (26), (28) при выполнении условий (27).

Пусть

$$A_1 = a, \quad A_3 = \frac{3}{2}a, \quad \alpha = \frac{2b^2}{a}, \quad f_0 = -\frac{5a}{b}, \quad (a > 0,\ b > 0)\,. \tag{29}$$

Тогда из условий (27) получим

$$A_2 = \frac{16}{7}a, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{2472}{385}b, \quad B_3 = -\frac{411}{110}b, \quad \beta = -\frac{10b^2}{11a}, \tag{30}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{s} = \left(-\frac{411a^2}{40f^2b},\ 0,\ 0\right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{411a^3}{8\,(fb)^2},\ 0,\ 0\right), \\
\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = \sqrt{Q(\sigma)}, \quad \omega_3 = \sqrt{R(\sigma)}, \\
Q(\sigma) = \frac{49a^2}{32\,(fb)^2}\sigma^2 - \frac{1225a^3}{64\,(fb)^3}\sigma + \frac{38563a^4}{512\,(fb)^4}, \\
R(\sigma) = -\frac{a^2}{2\,(fb)^2}\sigma^2 - \frac{15a^3}{2\,(fb)^3}\sigma - \frac{377a^4}{16\,(fb)^4}, \\
\nu_1 = \frac{11a^2}{4fb^2}\sigma, \quad \nu_2 = \left(-\frac{4}{7}f\sigma - \frac{5a}{b}\right)\omega_2, \quad \nu_3 = \left(f\sigma - \frac{5a}{b}\right)\omega_3.
\end{gathered} \tag{31}$$

В (30), (31) введено обозначение

$$f = \sqrt[4]{\frac{662475}{512}}\,\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}.$$

Функцию $\sigma = \sigma(t)$ получим обращением эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, вытекающего из уравнения

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{4\,(fb)^2}{7a^2}\sigma\sqrt{Q(\sigma)\,R(\sigma)} \tag{32}$$

при $\sigma \in [\sigma_1;\ \sigma_2]$,

$$\sigma_1 = -\frac{\left(30 + \sqrt{146}\right)a}{4fb}, \quad \sigma_2 = \frac{\left(\sqrt{146} - 30\right)a}{4fb}.$$

На указанном в (32) отрезке изменения σ, при исключении граничных точек, подкоренные функции $Q(\sigma)$ и $R(\sigma)$ имеют полиномиальные представления. Следовательно, действительнозначность решения (29)–(32) установлена.

Заключение. Построенные в статье три частных решения дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона не имеют аналогов в классической задаче динамики твердого тела и в задаче о движении тяжелого гиростата, то есть они не являются тривиальными обобщениями решения Б.И.Коносевича-Е.В.Поздняковича.

Информация о финансовой поддержке:

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки, тема № 1023020900001-4-1.1.2; 1.1.1.

1. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела / П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
2. *Гашененко И.Н.* Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2012. – 401 с.
3. *Горр Г.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
4. *Борисов А.В.* Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
5. *Klein F.* Uber die Theorie des Kreisels / F. Klein, A. Sommerfeld. – New York: Johnson reprint corp., 1965. – 966 s.
6. *Харламов П.В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–13.
7. *Горр Г.В.* Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2013. – 408 с.
8. *Зыза А.В.* Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата / А.В. Зыза // Компьютерное исследование и моделирование. – 2018. – Т. 10, № 1. – С. 7–25.
9. *Зыза А.В.* Об обобщенных уравнениях Н. Ковалевского в двух задачах динамики твердого тела / А.В. Зыза // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2019. – Т. 29, вып. 1. – С. 73–83.
10. *Зыза А.В.* Классификация полиномиальных решений уравнений динамики гиростата, имеющего неподвижную точку / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2021. – Вып. 51. – С. 90–108.
11. *Зыза А.В.* Новые классы частных решений одной задачи о движении гиростата / А.В. Зыза, Т.В. Хомяк, Е.С. Платонова // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2022. – Т. 32, вып. 2. – С. 298–318.
12. *Barnet S.I.* Gyromagnetic and Electron – Inertia Effects / S.I. Barnet // Rev. Modern. Phys. – 1935. – 7(2). – P. 129–166.
13. *London F.* Superfluids / F. London, H. London. – N.Y: Wiley Inc., 1950. – 372 p.
14. *Урман Ю.Н.* Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном поле / Ю.Н. Урман // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 6. – С. 1402–1404.
15. *Самсонов В.А.* О вращении твердого тела в магнитном поле / В.А. Самсонов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
16. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле / В.В. Козлов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28–33.

A.V. Zyza, R.N. Neskorodev

On new Konosevich-Pozdnyakovich polynomial-class solutions of one fixed-point rigid body dynamics problem.

The article investigates the existence conditions for the partial solutions of the polynomial structure of the Konosevich-Pozdnyakovitch class of differential equations describing the gyrostat motion problem in a magnetic field, taking into account the Barnett-London effect. New cases of integrability in this problem are found.

Keywords: *gyrostat, Barnett-London effect, polynomial solutions, invariance relations, first integrals.*

Статья поступила в редакцию 02.09.2024;
доработана 11.10.2024;
рекомендована к печати 24.10.2024.